НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"
Кафедра приладів і систем орієнтації та навігації

"ЗАТВЕРДЖЕНО"
на засіданні кафедри ПСОН
Протокол № 9
від « 14 » березня 2012 р.
Зав. кафедрою
____________Бурау Н.І.

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

Методичні вказівки
до виконання розрахунково-графічної роботи
за темою **«Складний рух точки»**
кредитного модуля
НП-03/1 "Кінематика. Статика."
напряму підготовки 6.051003 -Приладобудування

Київ – 2012

Укладач: Аврутов Вадим Вікторович

Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи за темою **«Складний рух точки»** кредитного модуля **НП-03/1 "Кінематика. Статика."** Для студентів напряму підготовки 6.051003 – Приладобудування. – Київ: НТУУ «КПІ», приладобудівний факультет, 2012. – 11 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки складені відповідно до чинної робочої навчальної дисципліни “Теоретична механіка” для студентів приладобудівного факультету, які навчаються за програмою освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавра за напрямом: 6.051003 – приладобудування.

Метою даного навчального видання є допомога студентам в освоєнні теоретичного матеріалу та надбанні необхідних практичних навичок аналізу типових лінійних систем в процесі виконання розрахунково-графічної роботи.

Розрахунково-графічна робота виконується як різновид самостійної роботи студента. Виконання розрахунково-графічної роботи сприятиме закріпленню, поглибленню та узагальненню теоретичних основ курсу, а також сприятиме розвитку навичок самостійної творчої роботи студентів у процесі їх навчання.

Тематика робіт присвячена вивченню розділу “Складний рух точки”.

Методичні вказівки містять стислі теоретичні відомості стосовно тематиці розділу, приклад виконання розрахунково-графічної роботи та завдання для різних варіантів розрахунково-графічних робіт.

Короткі теоретичні відомості

Нехай точка M рухається у рухомій системі координат $Oxyz$, яка здійснює певний рух відносно нерухомої системи координат $A\xi\eta\zeta$. У даному випадку йдеться про складний рух точки.

Рух точки у нерухомій системі координат $A\xi\eta\zeta$ називають *абсолютним*. Відповідно абсолютними називають траєкторію, швидкість і прискорення цієї точки.

Рух точки у рухомій системі координат $Oxyz$ називають *відносним*. Відносними називають траєкторію, швидкість і прискорення цієї точки.

Рух рухомої системи координат $Oxyz$ відносно нерухомої системи координат $A\xi\eta\zeta$ є для рухомої точки *переносним* рухом. Відповідно швидкість і прискорення точки, жорстко зв'язаної з рухомою системою координат, називають переносними.

Основною задачею кінематики складного руху є встановлення залежностей між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного та відносного рухів.

Теорема про додавання швидкостей. Абсолютна швидкість $\vec{v}$ точки при складному русі дорівнює векторній сумі відносної $\vec{v}_r$ та переносної $\vec{v}_e$ швидкостей:

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r\,. \qquad (1)$$

Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса). Абсолютне прискорення $\vec{w}$ точки при складному русі дорівнює векторній сумі відносного $\vec{w}_r$, переносного $\vec{w}_e$ прискорень та прискорення Коріоліса:

$$\vec{w} = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_c\,. \qquad (2)$$

Останній доданок називають прискоренням Коріоліса:

$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r\,. \qquad (3)$$

Модуль прискоренням Коріоліса:

$$w_c = 2\omega_e v_r \sin\left(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r\right). \qquad (4)$$

Методика розв'язування задач

Розв'язання задач кінематики складного руху точки передбачає отримання кінематичних характеристик точки у будь який момент часу.

Послідовність розв'язання задач кінематики складного руху точки:

1. Вводимо дві системи координат - нерухому $A\xi\eta\zeta$ і рухому $Oxyz$.
2. Розкладаємо абсолютний рух точки на два складових рухи: відносний і переносний.
3. Визначаємо відносний рух точки. Для цього уявно зупиняємо переносний рух. Знаходимо положення, швидкість і прискорення точки у відносному русі для заданого моменту часу за правилами кінематики точки.
4. Визначаємо переносний рух точки. Для цього уявно зупиняємо точку в її відносному русі. Знаходимо швидкість і прискорення точки переносного руху точки за правилами кінематики точки.
5. Застосовуємо теорему про додавання швидкостей (1) і визначаємо абсолютну швидкість точки.
6. Визначаємо прискорення Коріоліса за формулами (3) і (4).
7. За теоремою про додавання прискорень (2) визначаємо абсолютне прискорення точки.

Приклад розв'язування задач

Прямокутна пластина $ABCD$ $(AD = BC = a)$ обертається навколо сторони AB з кутовою швидкістю $\omega = \pi t$ рад/с. Вздовж сторони пластини BC точка M здійснює гармонічні коливання за законом $s = O_1M = \frac{a}{4}\sin\frac{\pi}{2}t$, см.

Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M в момент часу $t = \frac{1}{2}$ с (рис.1), якщо $BO_1 = \frac{a}{2}$.

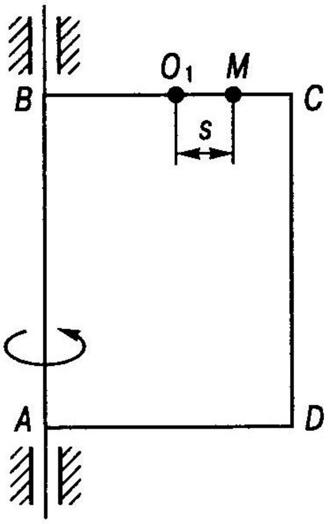

Рис. 1

<u>Розв'язування.</u> Розглянемо рух точки M як складний. Введемо дві системи координат: нерухому $A\xi\eta\zeta$ и рухому $Oxyz$, яку жорстко зв'яжемо з пластиною (рис.2).

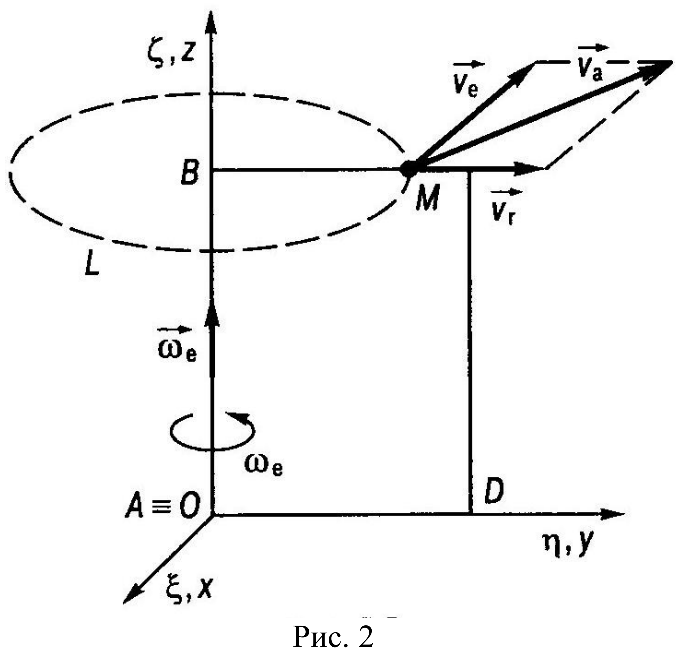

Рис. 2

Визначимо положення точки M в заданий момент часу:

$$BM = BO_1 + s = \frac{a}{2} + \frac{a}{4}\sin\frac{\pi}{4} = 0{,}675a \text{ см.}$$

Відносним рухом точки M є її прямолінійний рух вздовж сторони BC за законом

$s=\frac{a}{4}\sin\frac{\pi}{2}t$, см. Визначаємо відносну швидкість і прискорення точки M за правилами кінематики точки, що здійснює рух по прямолінійній траєкторії. Маємо відповідно

$$v_r=\dot{s}=\frac{\pi a}{8}\cos\frac{\pi}{2}t, \text{ см/с}$$

$$w_r=\ddot{s}=-\frac{\pi^2 a}{16}\sin\frac{\pi}{2}t, \text{ см/с}^2.$$

В момент часу $t=\frac{1}{2}$ с

$$v_r=\frac{\pi a}{16}\sqrt{2}=0{,}275a, \text{ см/с};$$

$$w_r=-\frac{\pi^2 a}{32}\sqrt{2}=-0{,}43a, \text{ см/с}^2.$$

Від'ємне значення w_r означає, що напрям прискорення протилежний вектору швидкості $\vec{v}_r$ (рис.3).

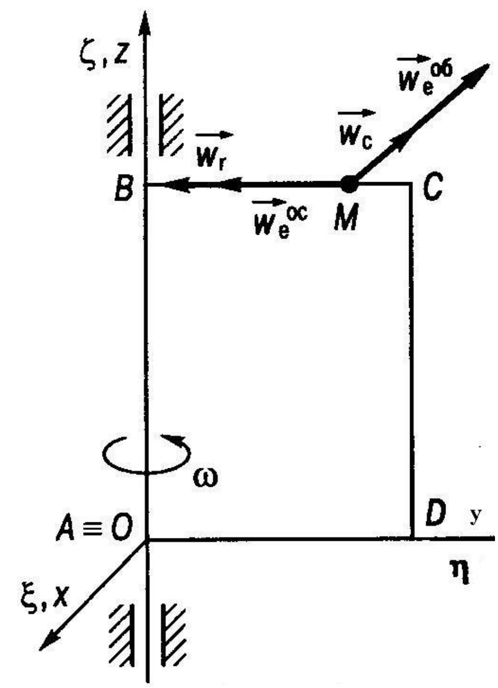

Рис. 3

Переносний рух – обертальний рух пластинки $ABCD$ навколо нерухомої осі AB з кутовою швидкістю $\omega=\pi t$ рад/с.

Переносними швидкістю і прискоренням тієї точки пластини, з якою в даний момент збігається досліджувана точка M. Отже,

$$v_e=\omega_e\cdot BM,$$

де ω_e - модуль кутової швидкості пластини; BM - найкоротша відстань від точки M до осі AB (радіус обертання точки).

Для моменту часу $t=\frac{1}{2}$ с маємо

$$\omega_e=\omega=\frac{\pi}{2} \text{ рад/с},$$

$$v_e = \frac{\pi}{2} \cdot 0{,}675a = 1{,}06a \text{ см/с.}$$

Переносне прискорення точки M

$$w_e = w_e^{ос} + w_e^{об},$$

де $w_e^{ос} = \omega_e^2 \cdot BM$; $w_e^{об} = \varepsilon_e \cdot BM$; $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = \pi$ рад/с².

Для $t = \frac{1}{2}$ с отримаємо

$$w_e^{об} = \varepsilon_e \cdot BM = 2{,}12a \text{ см/с}^2,$$

$$w_e^{ос} = \omega_e^2 \cdot BM = 1{,}66a \text{ см/с}^2.$$

Додатні знаки величин v_e і $w_e^{об}$ вказують на те, що вектори переносної швидкості і переносного обертального прискорення напрямлені у бік, що відповідає напряму обертання тіла навколо O_1O_2 (рис.3), тобто паралельно від'ємному напряму осі Ox по дотичній до кола L (рис.2).

Визначаємо прискорення Коріоліса за формулою

$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r,$$

відповідно його модуль для $t = \frac{1}{2}$ с

$$w_c = 2\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 0{,}86a \text{ см/с}^2.$$

За правилом векторного добутку вектор $\vec{w}_c$ напрямлений паралельно осі Ox в протилежному до неї напрямку (рис.3).

Визначаємо абсолютну швидкість точки M як геометричну суму відносної і переносної швидкостей:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Оскільки вектори $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_e$ взаємно перпендикулярні, то

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 1{,}1a \text{ см/с.}$$

Абсолютне прискорення точки знаходимо за теоремою Коріоліса

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_c,$$

або

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e^{ос} + \vec{w}_e^{об} + \vec{w}_c.$$

Оскільки вказані вектори прискорень розташовані в двох взаємно перпендикулярних напрямах, то

$$w = \sqrt{\left(w_e^{об} + w_c\right)^2 + \left(w_e^{ос} + w_r\right)^2} = 3{,}64a \text{ см/с}^2.$$

Література

1. Теоретична механіка: Збірник задач/ О.С. Апостолюк, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін.; За ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – 400с.
2. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підруч. – К.: Техніка, 2002. – 512с.

Варіанти завдань

За заданими законом руху $s_r(t)$ точки M відносно тіла D та кінематичними характеристиками обертального або поступального руху тіла D визначити для моменту часу t_1 абсолютні швидкість та прискорення точки M . Схеми механізмів показано на рис. 4 та 5, а потрібні для розрахунку дані наведено у табл.1.

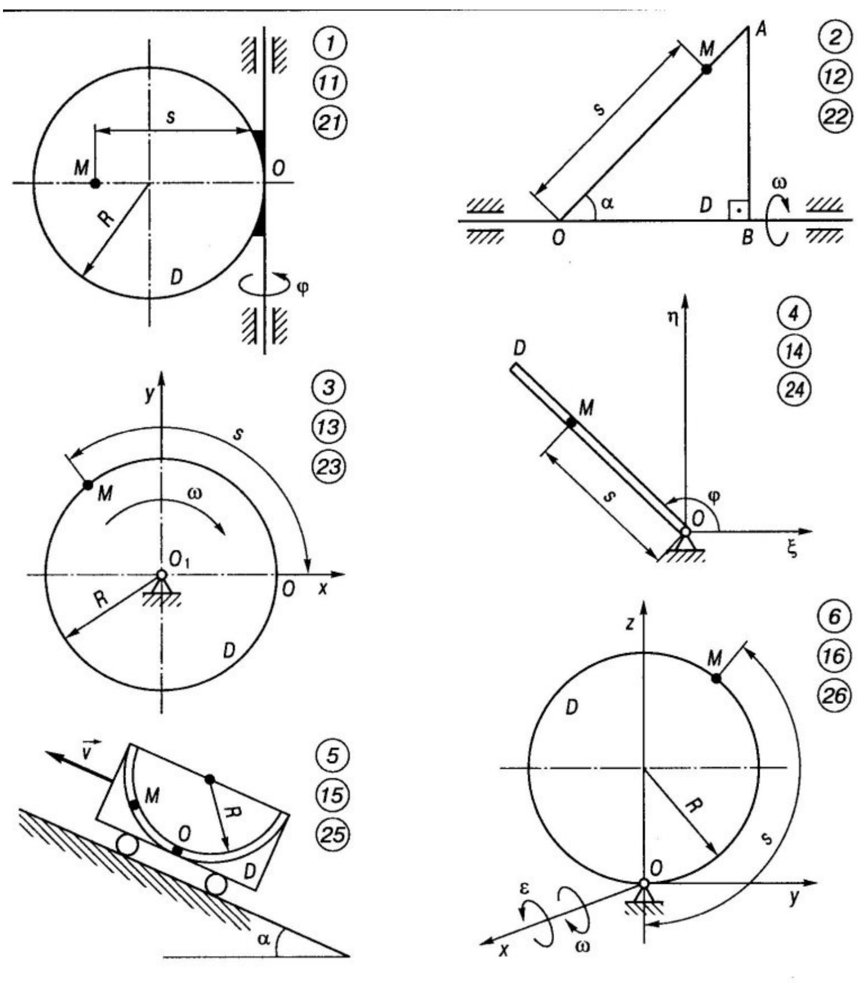

Рис. 4

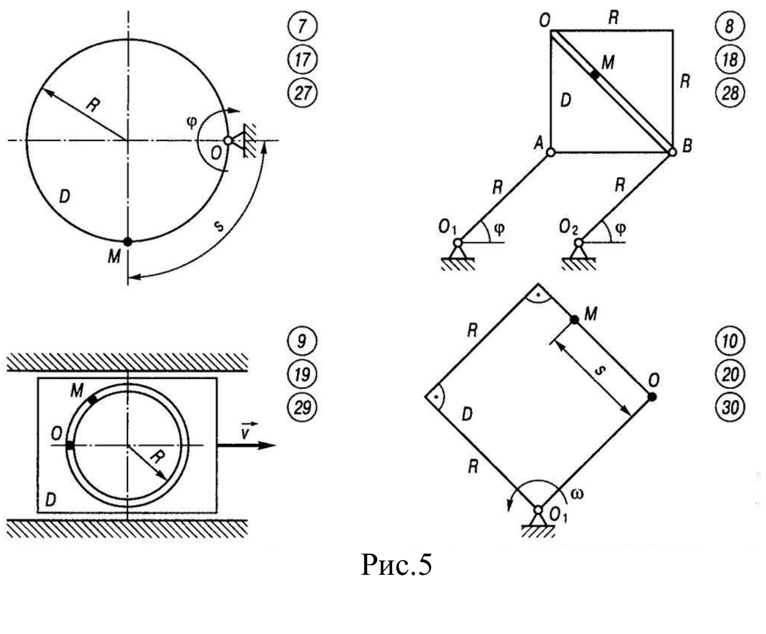

Рис.5

Табл.1

№ варіанта	Рівняння відносного руху точки $OM = s_r(t), см$	Рівняння руху тіла $\varphi = \varphi(t), рад$	t_1, c	$R, см$	Швидкість тіла v, см/с	Кутова швидкість тіла ω, рад/с	α, град	Кутове прискорення ε, рад/с²
1	$4t^2$	$t^2 - 6t$	2	20	-	-	-	-
2	$4t$	-	1	-	-	$4-2t$	30	-
3	$0,5\pi t^2$	-	5	50	-	$2t-11$	-	-
4	$5t^2$	$4t-t^2$	1	-	-	-	-	-
5	$30\pi\cos(\pi t/6)$	-	4	60	$4t$	-	30	-
6	$\pi(18-t^2)$	-	3	15	-	2	-	3
7	$2\pi t$	$\pi t(t/3-3)$	3	18	-	-	-	-
8	$8t^2$	$\pi t - \pi t^2/3$	1	15	-	-	-	-
9	$4\pi t^2$	-	1,5	20	$10\sin(\pi t/2)$	-	-	-
10	t^2+16t	-	2	40	-	$4t-9$	-	-
11	$2t^2$	$8t-1,5t^2$	2	20	-	-	-	-
12	$8t$	-	2	-	-	$2t^2$	60	-
13	$5\pi t^3/4$	-	2	30	-	$5-t^2$	-	-
14	$2t^2$	t^2-5t	2	-	-	-	-	-
15	$12\pi\sin(\pi t)$	-	1/6	24	$3t$	-	60	-
16	$5\pi(t^2-3t)$	-	1	30	-	3	-	5
17	$4\pi t$	$5t-t^2/2$	3	15	-	-	-	-
18	$4t^2+5$	$\pi t^2 - 2\pi t$	0,5	20	-	-	-	

19	$10\pi \sin(\pi t/6)$	-	5	30	$5-t^2$	-	-	-
20	t^3+2	-	2	20	-	$8-3t$	-	-
21	t^2+45	$2{,}5t^2$	1	30	-	-	-	-
22	t^2+1	-	3	-	-	$0{,}5t-4$	45	-
23	$20\pi \sin(\pi t/3)$	-	2,5	20	-	$2\pi t$	-	-
24	t^3+t	$0{,}5t^2$	3	-	-	-	-	-
25	$20\pi t^2$	-	1	60	$30\sin(\pi t/3)$	-	45	-
26	$20\pi t^2$	-	0,5	30	-	$1{,}5\pi$	-	3π
27	$10\pi t(t-2)$	$2\pi t^3/3$	0,5	10	-	-	-	-
28	$8+4\sin(\pi t/3)$	$2\pi t^3/3$	0,5	16	-	-	-	-
29	$2\pi t(1-t)$	-	2	12	$2t^2-t$	-	-	-
30	$10t^2+5t$	-	1	30	-	$8\pi t$	-	-