

УДК 621.372

# АНАЛИЗ СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ВИБРОАКУСТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Н. И. БУРАУ, П. И. МАРЧУК, А. Н. ТЯПЧЕНКО

Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев

Получено 6.09.2001

С целью тестирования некоторых современных методов обработки акустических сигналов: метода множественной классификации сигналов, метода Прони, частотно-временного анализа, вейвлет-преобразования – проведена обработка акустического сигнала, представляющего собой импульсный отклик бездефектного турбинного колеса при ударном возбуждении одной из лопаток. Продемонстрирована эффективность рассмотренных методов и целесообразность их использования в задачах вибраакустической диагностики зарождающихся усталостных дефектов в лопатках рабочих колес авиационных двигателей.

З метою тестування деяких сучасних методів обробки акустичних сигналів: методу множинної класифікації сигналів, методу Проні, частотно-часового аналізу, вейвлет-перетворення – проведено обробку акустичного сигналу, що являє собою імпульсний відгук бездефектного турбінного колеса при ударному збудженні однієї з лопаток. Продемонстровано ефективність розглянутих методів обробки й доцільність їхнього використання в задачах вібраакустичної діагностики початкових утомних дефектів у лопатках робочих коліс авіаційних двигунів.

In order to test the modern methods of the acoustic signal processing (namely, the method of multiple signal classification, the Prony's method, the frequency-time analysis, and the wavelet-transformation), a processing of the acoustic signal, being an impulsive response of a turbine without fault to the shock excitation of one of the rotor blades, is carried out. The effectiveness of the mentioned methods and expediency of their use for vibroacoustical diagnostics of arising fatigue faults in the rotor blades of aircraft motors is shown.

## ВВЕДЕНИЕ

Современный этап разработки и использования средств диагностики характеризуется интенсивной компьютеризацией. Вычислительная техника используется на всех этапах проектирования диагностических систем, но, безусловно, главную роль она играет в процессе обработки и анализа диагностической информации. Для вибраакустических методов диагностики зарождающихся дефектов в элементах конструкций машин и механизмов задача разработки эффективных алгоритмов анализа вибрационных и акустических сигналов приобретает в настоящее время особую актуальность. Проблемы обработки вибраакустической информации обусловлены, прежде всего, сложностью и многообразием измеряемых сигналов. Кроме того, важными факторами, определяющими специфику поиска информативных диагностических признаков дефекта, особенно на этапе его зарождения и начального развития, являются сравнительно малые изменения полезного сигнала при значительных уровнях помех, а также возможная нестационарность измеренных сигналов. Наиболее часто в диагностической практике встречаются сигналы, соответствующие локально нестационарной модели. Появление в сигнале локальной нестационарности, как правило, связа-

но с нарушением сплошности материала объекта диагностики, локальным изменением его свойств во времени или пространстве, а также нестационарным или локально нестационарным характером возбуждения объекта.

Перечисленные проблемы характерны для многих объектов вибраакустической диагностики и неразрушающего контроля. В полной мере они присутствуют и в задачах вибраакустической диагностики усталостных трещин в лопатках рабочих колес авиационных газотурбинных двигателей [1]. На практике о состоянии рабочих колес двигателя судят, как правило, по их обобщенным акустическим портретам, в качестве которых используются спектры мощности вибраакустических сигналов, полученные для стационарных режимов работы двигателя. Однако для обнаружения усталостных дефектов в лопатках рабочих колес на ранней стадии (т.е. до появления необратимых катастрофических изменений) необходимо использовать более тонкие методы диагностики, эффективные при обработке существенно нестационарных сигналов. Такие методы должны обладать высокой разрешающей способностью для анализа локальных изменений спектра и позволять выделить информативные составляющие при малых значениях отношения сигнал/шум.

Целью данной работы является анализ эф-

фективности некоторых современных методов обработки акустических сигналов в частотной, частотно-временной и масштабно-временной областях, позволяющий определить их пригодность для вибравакуистической диагностики и оценивания малых усталостных трещин в лопатках рабочих колес авиационных двигателей. В качестве исходной информации используется акустический сигнал, представляющий собой импульсный отклик бездефектного турбинного колеса, лопатки которого жестко соединены с диском путем горячего изостатического прессования, при ударном возбуждении одной из лопаток [2]. Реализация сигнала длиной 32000 точек с периодом дискретизации 20 мкс представлена на рис. 1.

## 1. СПЕКТРАЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛА МЕТОДОМ MUSIC

Приведенные в [2] результаты спектрального анализа сигналов, подобных анализируемому в данной работе, показывают, что типичный спектр свободных колебаний системы диск–лопатки содержит несколько областей стущения частот, которые несут информацию о колебаниях возбужденной лопатки и некоторых соседних лопаток ( $4.5 \div 5.5$ ,  $9.0 \div 9.5$  и  $12.5 \div 14.5$  кГц), а также диска (3.1 и 4.4 кГц). Таким образом, даже в случае отсутствия дефекта анализируемый сигнал является достаточно сложным и содержит множество информативных узкополосных компонент на фоне широкополосного измерительного шума. Зарождение и начальное развитие поверхностной усталостной трещины в лопатках будет приводить к сравнительно малым изменениям параметров их свободных колебаний и спектральных характеристик измеренных акустических сигналов. В частности, имеют место изменение собственных частот и показателей затухания, появление постоянной составляющей, обогащение спектральной плотности составляющими малой интенсивности на кратных частотах [3, 4]. Поэтому для спектральной обработки таких сложных многокомпонентных сигналов, полученных в условиях аддитивных шумов, целесообразно использовать методы, обладающие высокой разрешающей способностью, например, алгоритм множественной классификации сигналов MUSIC (multiple signal classification) [5].

Данный алгоритм относится к классу методов спектральной обработки, основанных на анализе собственных значений автокорреляционной ма-

трицы  $R_p$ :

$$R_p = \sum_{i=1}^M (\lambda_i + \rho_w) v_i v_i^H + \sum_{i=M+1}^{p+1} \rho_w v_i v_i^H, \quad (1)$$

где  $\lambda_i$ ,  $v_i$  – собственные значения матрицы и собственные векторы;  $v_i^H$  – эрмитово-сопряженный собственный вектор;  $p$  – размерность пространства собственных векторов;  $M$  – размерность подпространства сигнала (главных собственных векторов);  $\rho_w$  – дисперсия аддитивного белого шума.

В соответствии с уравнением (1) информация, содержащаяся в автокорреляционной матрице (или матрице данных), разделяется на два подпространства: подпространство сигнала ( $i = 1, M$ ) и подпространство шума ( $i = M+1, p+1$ ). Если для обработки информации используются только собственные векторы подпространства сигналов, то за счет устранения основной доли вклада шума в автокорреляционную матрицу (матрицу данных) происходит увеличение соотношения сигнал/шум. В то же время, так как векторы сигнала ортогональны всем векторам и их линейным комбинациям в подпространстве шума, то использование собственных векторов подпространства шума позволяет получить спектральные псевдооценки узкополосных составляющих сигнала, обладающие разрешением, превосходящим разрешение авторегрессионных методов спектрального оценивания [5]. Такие частотные псевдооценки и получают в результате использования алгоритма классификации множественных сигналов MUSIC:

$$P_{\text{MUSIC}}(f) = \left[ e^H(f) \left( \sum_{k=M+1}^p v_k v_k^H \right) e(f) \right]^{-1}, \quad (2)$$

где  $e(f)$  – вектор комплексных синусоид.

На рис. 2 представлены результаты обработки акустического сигнала с применением алгоритма (2). Отметим, что для обработки использовалась выборка из 2048 точек со взвешиванием с помощью окна Хемминга. Для сравнения на рис. 3 представлена оценка спектральной плотности мощности этой же выборки, полученная периодограммным методом Уэлча с окном Хемминга. Как видно из рис. 2, графическое представление оценок частоты имеет достаточно хорошо различаемые острые пики на частотах узкополосных компонент сигнала. При этом все полученные оценки принадлежат только полезному сигналу, что практически труднодостижимо при использовании других методов частотного анализа (рис. 3). Все сказанное позволяет сделать вывод

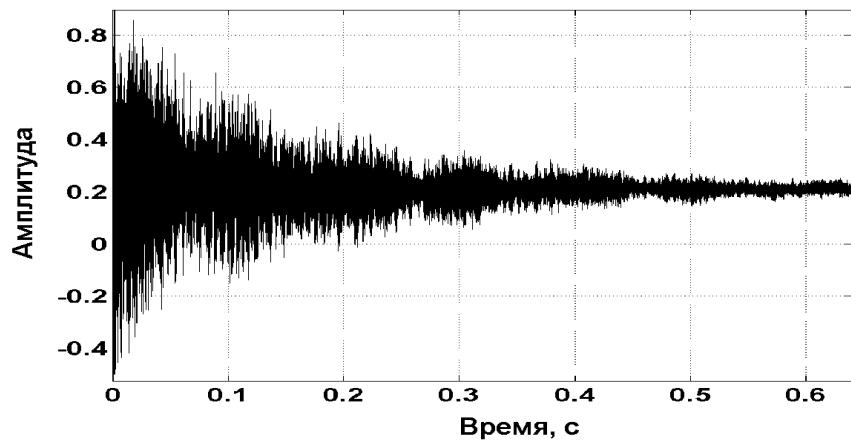


Рис. 1. Реализация импульсного отклика рабочего колеса

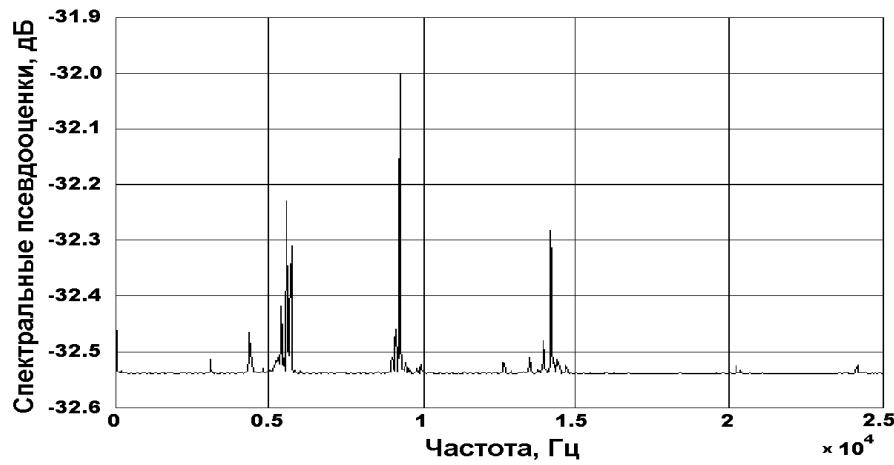


Рис. 2. Результаты спектральной обработки сигнала методом MUSIC

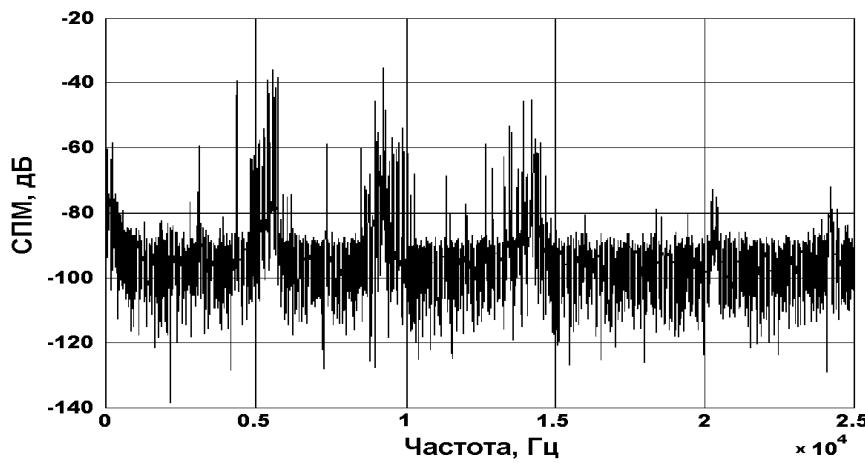


Рис. 3. Результаты спектральной обработки сигнала периодограммным методом Уэлча

Таблица. Зависимости статистических характеристик оценок относительных показателей затухания от длины выборки реализации  $N$  и количества членов разложения  $q$

$N$	$m_{f_i}$ , Гц	$m_{\zeta_i}$ , $\text{с}^{-2}$	$\sigma_{\zeta_i}^2$ , $\text{с}^{-4}$		
			$q = 20$	$q = 50$	$q = 100$
1024	3095.2	$1.84 \cdot 10^{-3}$	—	$4.26 \cdot 10^{-7}$	$4.21 \cdot 10^{-7}$
	4747.2	$5.41 \cdot 10^{-3}$	$2.95 \cdot 10^{-6}$	$2.31 \cdot 10^{-6}$	$5.68 \cdot 10^{-7}$
	5377.8	$1.42 \cdot 10^{-2}$	—	$3.38 \cdot 10^{-6}$	$3.22 \cdot 10^{-6}$
	5605.2	$6.34 \cdot 10^{-3}$	$1.83 \cdot 10^{-5}$	$5.84 \cdot 10^{-6}$	$3.53 \cdot 10^{-6}$
	9255.2	$1.73 \cdot 10^{-3}$	$8.96 \cdot 10^{-7}$	$2.54 \cdot 10^{-7}$	$1.69 \cdot 10^{-7}$
2048	3096.3	$1.96 \cdot 10^{-3}$	—	$4.47 \cdot 10^{-7}$	$4.34 \cdot 10^{-7}$
	4747.3	$5.49 \cdot 10^{-3}$	$3.41 \cdot 10^{-6}$	$2.12 \cdot 10^{-6}$	$1.74 \cdot 10^{-7}$
	5390.6	$1.34 \cdot 10^{-2}$	—	$4.05 \cdot 10^{-6}$	$3.78 \cdot 10^{-6}$
	5619.4	$5.77 \cdot 10^{-3}$	$4.71 \cdot 10^{-6}$	$2.74 \cdot 10^{-6}$	$2.31 \cdot 10^{-6}$
	9252.7	$1.67 \cdot 10^{-3}$	$3.52 \cdot 10^{-7}$	$9.84 \cdot 10^{-8}$	$6.45 \cdot 10^{-8}$

о том, что дополнительные составляющие частотных оценок, обусловленные зарождением и начальным развитием усталостной трещины и имеющие малую интенсивность, также могут быть выделены и проанализированы в диагностических целях.

## 2. ОЦЕНИВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЗАТУХАНИЯ УЗКОПОЛОСНЫХ КОМПОНЕНТ СИГНАЛА ПО МЕТОДУ ПРОНИ

Как отмечалось выше, одним из проявлений усталостного повреждения лопаток является изменение коэффициентов затухания свободных колебаний. Поэтому возможность их оценки представляет значительный интерес при обработке диагностической информации. Для оценки коэффициентов затухания  $\alpha_i$  или относительных показателей  $\zeta_i = \alpha_i / 2\pi f_i$  может быть использован метод Прони [5], состоящий в аппроксимации  $N$ -точечной выборки из множества данных  $q$ -членной моделью комплексных экспонент:

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^q A_k \exp[(\alpha_k + j2\pi f_k)(n-1)T + j\theta_k], \quad (3)$$

где  $T$  – период дискретизации;  $n$  – номер такта;  $A_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $f_k$  и  $\theta_k$  – амплитуда, коэффициент затухания, частота и начальная фаза  $k$ -ой гармоники соответственно. После введения обозначений  $h_k = A_k \exp(j\theta_k)$  и  $z_k = \exp[(\alpha_k + j2\pi f_k)T]$  выражение (3) может быть записано в виде

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^q h_k z_k^{n-1}$$

или в форме  $z$ -преобразования

$$\hat{x}[z] = \sum_{k=1}^q \frac{h_k z}{z_k(z - z_k)}, \quad (4)$$

где  $z = \exp(j2\pi fT)$ .

Оценка неизвестных параметров  $A_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $f_k$  и  $\theta_k$  по методу Прони производится на основании оценок коэффициентов дискретной передаточной функции некоторого фильтра с конечной импульсной характеристикой. В качестве импульсной характеристики фильтра используется  $N$ -точечная выборка из множества обрабатываемых данных. При этом дискретная передаточная функция фильтра имеет вид преобразования (4), записанного через искомые параметры  $h_k$  и  $z_k$ . Таким образом, после определения параметров передаточной функции фильтра находятся ее полюса  $z_i$ , по которым определяются оценки частоты  $f_i$  и коэффициента затухания  $\alpha_i$   $i$ -той гармонической составляющей сигнала:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{T} \ln |z_i| \quad \text{и} \quad \hat{f}_i = \frac{1}{2\pi T} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{Im}(z_i)}{\operatorname{Re}(z_i)} \right].$$

Качество получаемых оценок, в первую очередь, зависит от длины обрабатываемой выборки сигнала  $N$  и количества членов разложения  $q$  в аппроксимации (3). Для анализируемого сигнала оценки некоторых частот  $f_i$  и соответствующих им значений относительных показателей затухания  $\zeta_i$  получены для следующих данных:  $N = 1024, 2048$  и  $q = 20, 50, 100$ . В таблице приведены значения математического ожидания и дисперсии полученных оценок в зависимости от значений параметров  $N$  и  $q$ . Полученные результаты показывают, что точность оценивания показателей затухания

для близких по частоте компонент сигнала (5.4 и 5.6 кГц) оказалась несколько ниже, чем для более удаленных частот (3.1, 4.7 и 9.3 кГц). Практически для всех составляющих сигнала точность оценивания возрастает при увеличении длины выборки и количества членов разложения. При этом для  $q \geq 50$  отношения дисперсий полученных оценок к квадрату их математических ожиданий для всех частотных составляющих не превышают 0.15, что говорит о приемлемой статистической устойчивости полученных оценок.

### 3. ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ СИГНАЛА

Влияние зарождающихся усталостных дефектов проявляется не только в обогащении спектра свободных колебаний, но и в изменении его характера во времени [6]. Для получения более полной информации о спектральных характеристиках измеренного сигнала используются методы частотно-временного анализа, основанные на псевдораспределении Вигнера – Вайла [7]:

$$W_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) \times \exp(-j\omega\tau) d\tau, \quad (5)$$

где  $x(u)$  – временной сигнал;  $*$  – знак комплексного сопряжения;  $g(\tau)$  – весовая функция скользящего окна Гаусса.

Частотно-временные методы анализа, основанные на представлении (5), позволяют определить когда и какие именно частотные составляющие присутствуют в анализируемом сигнале. Такие методы нашли широкое применение в различных технических приложениях, в частности, в задачах диагностики и неразрушающего контроля.

Рис. 4 качественно иллюстрирует результат обработки 256-точечной выборки анализируемого сигнала, показывающий зависимость оценок спектральной плотности от частоты сдвига  $\Delta f$  и времени (в отсчетах). Результат представлен изолиниями в 10 уровнях интенсивности. При этом на каждом профиле сигнала внутренние изолинии соответствуют более высокому уровню. Как следует из рисунка, интенсивность спектральной плотности выборки для каждой частоты сдвига изменяется во времени, что говорит о нестационарности анализируемого сигнала. Сравнение линий равного уровня данного частотно-временного представления с подобным результатом обработки при наличии дефекта позволит выделить диагностические

признаки дефекта, в качестве которых можно использовать, например, изменение значения минимального (максимального) уровня спектральных оценок при одинаковом количестве уровней их представления.

Ограничение данного метода состоит в выборе размера окна, который является постоянным при анализе всех частотных компонент исследуемого сигнала и определяет точность преобразования. При этом достаточная разрешающая способность для анализа локальных изменений спектра достигается не всегда.

### 4. ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛА

В последние годы активно развиваются новые методы анализа сигналов, основанные на времязависимых преобразованиях, находящих все более широкое применение в задачах обработки информации. Например, вейвлет-преобразование позволяет одновременно выявлять и оценивать параметры кратковременных событий и анализировать медленные изменения сигналов, что делает его исключительно мощным средством обработки локально нестационарных и существенно нестационарных сигналов в задачах диагностики и неразрушающего контроля.

Как известно [8], непрерывное вейвлет-преобразование представляет собой свертку анализируемого сигнала  $x(t)$  с некоторой вейвлет-функцией  $\Psi_{a,b}$ , полученной путем масштабирования (с помощью коэффициента  $a$ ) и временного перемещения (с помощью параметра сдвига  $b$ ) выбранного базового вейвлета  $\Psi$ :

$$W_\Psi x(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt.$$

Здесь  $*$  – знак комплексного сопряжения.

Дискретное преобразование определяется для параметров масштаба и сдвига с основанием 2, т. е. для  $a = 2^j$  и  $b = n2^j$ :

$$W(2^j, n2^j) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \sum_k \Psi^* \left( \frac{k}{2^j} - n \right) x(k),$$

где  $j$  – число уровней разложения сигнала.

Одним из преимуществ вейвлет-преобразования, по сравнению с методами частотного и частотно-временного анализа, является его многоразрешающая способность. Известно, что параметры разрешения сигналов по времени  $\Delta_t$  и

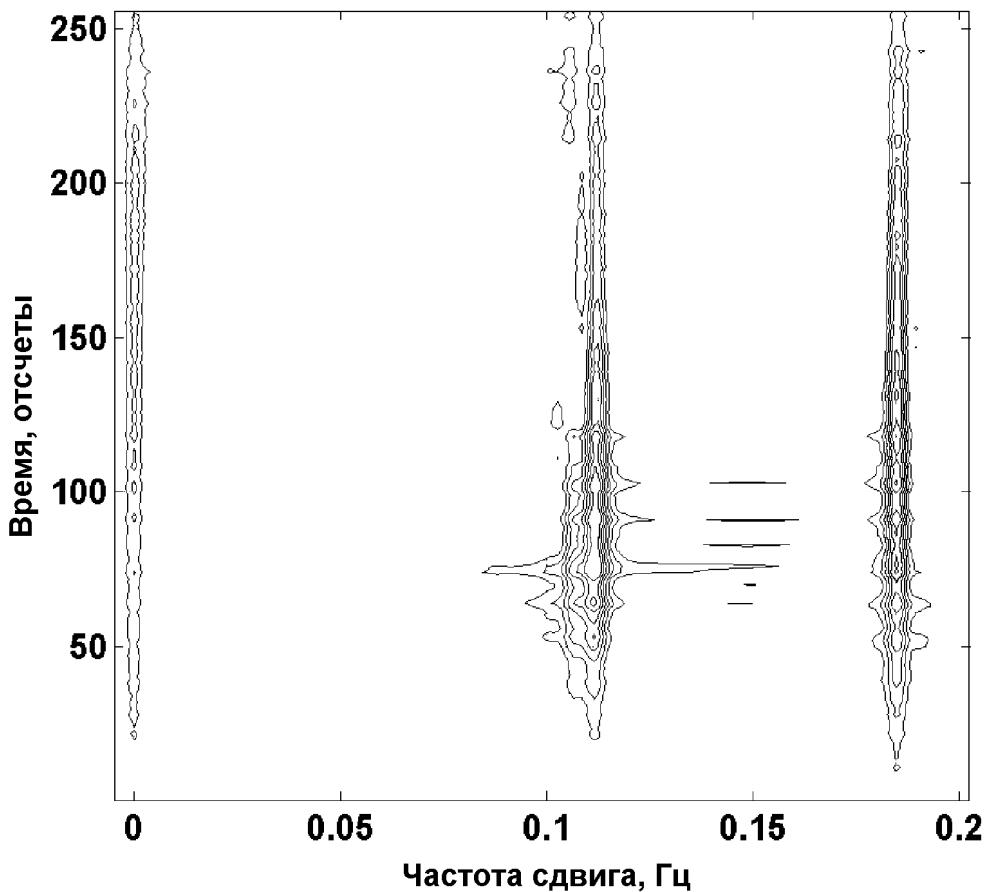


Рис. 4. Результаты частотно-временной обработки сигнала

по частоте  $\Delta_f$  связаны принципом неопределенности [5]:

$$\Delta_t \Delta_f \geq \frac{1}{2},$$

что соответствует невозможности выбора произвольно малых разрешений в обоих измерениях. При использовании вейвлет-преобразования параметры разрешения для базовой вейвлет-функции, а также масштабированной и смещенной функции не подчиняются этой зависимости. Если центр и разрешение базовой вейвлет-функции во временном измерении обозначить как  $\delta_{t1}$  и  $\Delta_{t1}$  соответственно, а в частотной области – как  $\delta_{f1}$  и  $\Delta_{f1}$ , то для масштабированной и смещенной функции эти характеристики определяются так [9]:

$$\begin{cases} \delta_{t2} = a\delta_{t1} + b, \\ \Delta_{t2} = a\Delta_{t1}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \delta_{f2} = \delta_{f1}/a, \\ \Delta_{f2} = \Delta_{f1}/a. \end{cases}$$

Как следует из этого соотношения, и временное, и частотное разрешение зависят от параметра мас-

шаблирования  $a$ . При этом постоянной частотно-независимой величиной является следующее отношение:

$$\frac{\delta_{f1}}{\Delta_{f1}} = \frac{\delta_{f2}}{\Delta_{f2}}.$$

Приведенные зависимости временного и частотного разрешений от параметра масштабирования и характеризуют многоразрешающую способность вейвлет-преобразования: для больших значений параметра (низкие частоты) преобразование обеспечивает более тонкое частотное разрешение и более грубое временное, а для его малых значений (высокие частоты) – ситуация обратная: имеет место более грубое частотное разрешение при более тонком временном.

Для обработки 16000-точечной выборки сигнала была использована базовая вейвлет-функция  $db10$  с разложением на 10 уровней. Результат разложения сигнала в иерархический набор аппроксимаций и деталей представлен на рис. 5. Количество уровней разложения выбрано исходя из необходи-

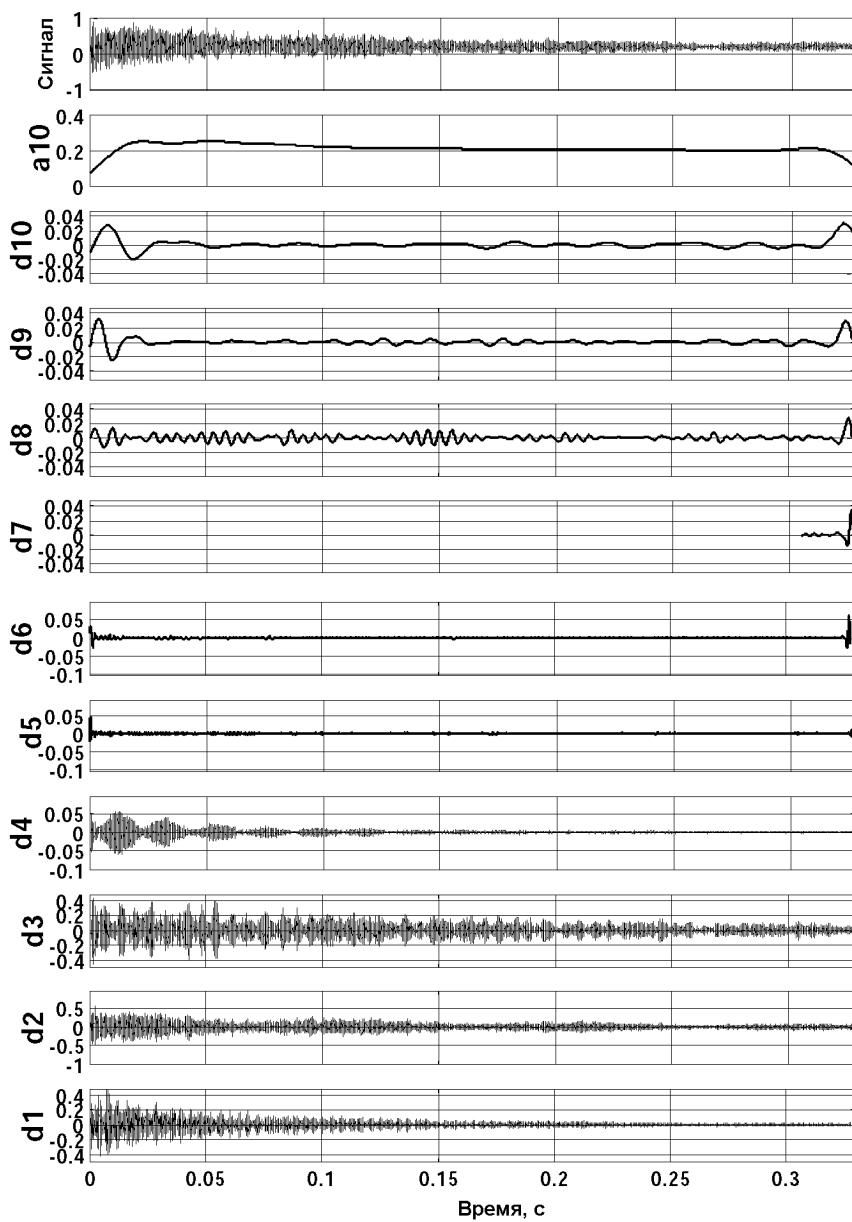


Рис. 5. Вейвлет-разложение сигнала на 10 уровней

мости выделения на последнем уровне самой низкочастотной компоненты сигнала (постоянной составляющей). Детали старшего уровня разложения ( $d_{10}$ ) характеризуют быстротечный переходной процесс в лопатке, обусловленный контактом с ударным устройством. Остальные элементы разложения несут информацию об узкополосных компонентах обрабатываемого сигнала и аддитивном шуме. Последнее заключение сделано на основании результатов спектральной обработки элементов разложения и их сравнения со спектральными

оценками по методу классификации множественных сигналов, приведенных на рис. 2.

Для используемого в данной работе представления результатов обработки диагностические признаки могут быть определены путем сравнения статистических характеристик отдельных элементов разложения при отсутствии и наличии дефекта [10]. Если результаты вейвлет-преобразования представить в виде тонового (для непрерывного преобразования) или дискретно-тонового (для дискретного преобразования) изо-

бражения на плоскости времени – масштаб, то в качестве диагностических признаков возможных усталостных дефектов могут быть использованы, например, координаты глобальных и/или локальных экстремумов преобразования, или же экстремальные значения интенсивности линий равного уровня и их геометрические параметры.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Для оценки эффективности некоторых современных методов обработки информации и возможности их применения в задачах вибраакустической диагностики зарождающихся усталостных дефектов в лопатках рабочих колес авиационных двигателей проведен анализ акустического сигнала, представляющего собой импульсный отклик бездефектного турбинного колеса при ударном возбуждении одной из лопаток.
2. В результате использования алгоритма множественной классификации сигналов MUSIC в работе получены спектральные псевдооценки узкополосных компонент сигнала. Эти оценки характеризуют только полезный сигнал и обладают разрешением, превосходящим разрешение классических и авторегрессионных методов спектрального оценивания, что говорит о высокой эффективности данного метода и целесообразности его использования в задачах вибраакустической диагностики.
3. Проведено оценивание относительных показателей затухания узкополосных компонент сигнала по методу Прони. Показано, что полученные оценки обладают приемлемой статистической устойчивостью, а точность оценивания возрастает с увеличением длины обрабатываемой выборки сигнала и количества членов разложения.
4. Проведена обработка акустического сигнала в частотно-временной области. Ее результаты показали зависимость оценок спектральной плотности на частотах сдвига от времени, что говорит о нестационарности сигнала.
5. В результате обработки сигнала с использованием вейвлет-преобразования получено его разложение в иерархический набор аппроксимации и деталей, наиболее полно характеризующих все составляющие обрабатываемого сигнала.

6. Показано, что результаты обработки информации с использованием рассмотренных методов могут служить основанием для выделения диагностических признаков при решении задачи вибраакустической диагностики зарождающихся усталостных дефектов в лопатках рабочих колес авиационных двигателей.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают глубокую благодарность сотрудникам Центрального института авиационного моторостроения (Москва, Россия) за любезно предоставленные для анализа экспериментальные данные.

1. Каравес В. А., Максимов В. П., Сидоренко М. К. Вибродиагностика газотурбинных двигателей.– М.: Машиностроение, 1978.– 131 с.
2. Шорр Б. Ф., Мельникова Г. В., Магеррамова Л. А., Миронов А. К. Исследование динамических характеристик турбинного колеса типа “блиск” с монокристаллическими лопатками // Авиационно-космическая техника и технология. Сб. науч. тр. Гос. аэрокосмич. ун-та “ХАИ”.– 2000.– Вып. 19. Тепловые двигатели и энергоустановки.– С. 236–240.
3. Матвеев В. В., Бовсуновский А. П. К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Изгибные колебания. Аналитическое решение // Пробл. прочн.– 1998.– N 6.– С. 9–22.
4. Бурау Н. І. Аналіз моделей об'єкта діагностики з кусково-лінійною характеристикою відновлюваної сили і методів їх аналітичного дослідження // Наукові вісті НТУУ “КПІ”.– 1999.– N 3.– С. 48–56.
5. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения.– М.: Мир, 1990.– 584 с.
6. Балицкий Ф. Я., Иванова М. А., Соколова А. Г., Хомяков Е. И. Вибраакустическая диагностика зарождающихся дефектов.– М.: Наука, 1984.– 119 с.
7. Cohen L. Time-frequency distribution – A review // Proc. IEEE.– 1989.– 77, N 7.– P. 941–981.
8. Daubechies I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis // IEEE Trans. Information Theory.– 1990.– IT-36, N 5.– P. 961–1005.
9. Mallat S. Theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Trans. PAMI.– 1989.– 11, July.– P. 674–693.
10. Бурау Н. І., Марчук П. І. Виділення діагностичних ознак тріщини в лопатках авіаційних двигунів шляхом вейвлет-перетворення нестационарного акустичного сигналу // Фізичні методи та засоби контролю середовищ, матеріалів та виробів.– 2001.– Вип. 6.– С. 219–224.