НТУУ "Київський політехнічний інститут"

Кафедра приладів і систем орієнтації і навігації

Ю. Ф. Лазарєв

Лекції

з навчальної дисципліни

"Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації – 3"

Ч. 2. Лекції 6 – 9

Розділ 1. Основи прикладних теоретичних досліджень

Тема 1.2. Дослідження стійкості руху нелінійних систем

Київ – 2015

Зміст

Лекція 6. Стійкість руху за Ляпуновим

Досить часто головна мета теоретичного дослідження полягає не у розв'язуванні системи диференціальних рівнянь руху об'єкта вивчення, а у визначенні стійкості руху, що вивчається, й у з'ясуванні параметрів, які впливають на стійкість руху. Така постановка задачі має великий практичний сенс, бо, проектуючи технічну систему чи пристрій, необхідно насамперед створити таку систему або пристрій, рух якої (якого) був би у певному розумінні інваріантним, стійким до дії зовнішніх збурень. Окрім того, досліджувати стійкість набагато простіше за розв'язування рівнянь, особливо нелінійних динамічних систем.

У реальних технічних системах з розвитком техніки дедалі частіше зустрічаються випадки, коли поводження системи неможливо описати лише лінійними диференціальними рівняннями, бо в реальній системі виникають такі суттєві особливості руху, які не притаманні лінійній стаціонарній системі. Тому в інженерній практиці великої значущості набуває теоретичне дослідження саме *нелінійних систем*, що описуються диференціальними рівняннями, в яких трапляються члени (сили), нелінійно залежні від узагальнених координат і (або) узагальнених швидкостей.

Наприклад, розглянемо рівняння руху гіроскопа у кардановому підвісі:

$$\begin{cases} (J_1 + J_2\cos^2\beta)\ddot{\alpha} - 2J_2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta + H\dot{\beta}\cos\beta = N - R\sin\beta; \\ J_3\beta + J_2\alpha^2\sin\beta\cos\beta - H\dot{\alpha}\cos\beta = L; \\ \dfrac{dH}{dt} = R + M_{\text{ст}}. \end{cases}$$

Неважко впевнитися, що вихідна величина – кут β повороту рамки підвісу – входить до членів системи диференціальних рівнянь як аргумент тригонометричних функцій. Крім того, деякі члени рівнянь містять добутки цих тригонометричних функцій, добутки їх та похідних від вихідної величини і добутки похідних. У правій частині міститься добуток вхідної величини R (момент відносно головної осі гіроскопа сил, що діють на ротор) і функції від вихідної ($\sin\beta$). Джерелом нелінійностей можуть бути також моменти сил N, L, R та $M_{\text{ст}}$, які в реальних умовах, будучи моментами сил взаємодії між елементами карданового підвісу, можуть залежати або від самих кутів α, β та γ відносного повороту рамок (коли сили взаємодії мають пружний характер), або від кутових швидкостей $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ та $\dot{\gamma}$ (якщо це сили тертя), або й від тих і тих одночасно. Ці залежності можуть бути й нелінійними (наприклад, сухе чи турбулентне тертя).

Зазвичай усі нелінійності розподіляють на два великі класи, підходи до дослідження яких суттєво розрізнюються. До першого класу належать *гладкі нелінійності*, які математично відображуються неперервними та диференційовними залежностями від узагальнених координат і швидкостей, до другого класу

– *суттєві нелінійності*, у яких їх математична залежність від узагальнених координат чи швидкостей або має розриви першого роду, або похідна цих залежностей за аргументами (q чи $\dot{q}$) не є неперервною.

Нелінійні системи з гладкими нелінійностями вивчати значно простіше, оскільки при цьому можна застосовувати численні аналітичні методи й, зокрема, подання залежностей у виді степеневого ряду. Тому більшість методів дослідження нелінійних систем *розраховані саме на системи з гладкими нелінійностями*. Зокрема, до них належить *теорія дослідження стійкості за Ляпуновим*.

Будь-яку систему звичайних диференціальних рівнянь можна подати у нормальній формі Коші, тобто у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = z_1(y_1, y_2, \cdots, y_n, t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = z_2(y_1, y_2, \cdots, y_n, t) \\ \qquad \cdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = z_n(y_1, y_2, \cdots, y_n, t) \end{cases}. \tag{6.1}$$

Змінні $y_1, y_2, \cdots, y_n$, які дозволяють записати систему диференціальних рівнянь n-го порядку у вигляді (6.1), називають *змінними стану* системи, або *фазовими змінними*. Кількість змінних стану збігається з порядком системи диференціальних рівнянь.

У рівняннях (6.1) z_i є заданими (у загальному випадку – нелінійними) функціями змінних $y_1, y_2, \cdots, y_n$, а також часу t, які задовольняють умови існування та єдиності розв'язку.

Деякий, цілком визначений стаціонарний рух системи, який описується одним з частинних розв'язків системи (6.1) і досліджується на стійкість, називається *незбуреним рухом*:

$$y_1^*(t) = f_1(t), \cdots, y_n^*(t) = f_n(t).$$

Цей частинний розв'язок задовольняє початкові умови: якщо $t = t_0$

$$y_1^*(t_0) = f_1(t_0), \cdots, y_n^*(t_0) = f_n(t_0).$$

Змінимо початкові умови, надаючи початковим значенням $f_i(t)$ незначні прирости ε_i. Тобто нехай тепер

$$y_1(t_0) = f_1(t_0) + \varepsilon_1, \quad \cdots, \quad y_n(t_0) = f_n(t_0) + \varepsilon_n. \tag{6.2}$$

Рух системи, який відповідає зміненим початковим умовам (6.2), називають *збуреним рухом*, а величини ε_i – *збуреннями*. Визначимо різницю між значенням змінної стану в збуреному і незбуреному рухах:

$$x_i = y_i(t) - f_i(t); \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{6.3}$$

Нові змінні x_i називаються *відхиленнями* або *варіаціями* величин y_i. Якщо всі відхилення дорівнюють нулю, тобто

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad \cdots, \quad x_n = 0 \;, \tag{6.4}$$

то збурений рух $y_i(t)$ збігатиметься з незбуреним рухом $f_i(t)$. Інакше кажучи, *незбуреному руху відповідають нульові значення варіацій* x_i.

Далі задля наочності вживатимемо мову геометрії.

Сукупність відхилень x_i у n-вимірному фазовому просторі (просторі станів) змінних x_i (варіацій) визначає точку M (її називають *зображувальною точкою*). У збуреному русі в разі змінювання величин x_i зображувальна точка M описуватиме деяку траєкторію у фазовому просторі. *Незбуреному руху відповідає* у цьому просторі *початок координат* (див. (6.4)).

Відхилення збуреного руху від незбуреного визначається величинами $x_i(t)$. Якщо всі $x_i(t)$ є малими за модулем, то є малою й сума їх квадратів:

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) + \cdots + x_n^2(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) \,. \tag{6.5}$$

Якщо ж відхилення хоча б однієї координати буде великим, то сума (6.5) буде також великою. Тому як міру відхилення збуреного руху від незбуреного можна використати суму (6.5). Оскільки ця сума є квадратом відстані зображувальної точки M від початку координат, то ця відстань характеризує у цілому відхилення збуреного руху від незбуреного.

Згідно з визначенням збуреного руху і рівностями (6.3) та (6.4) матимемо:

$$x_i(t_0) = x_{0i} = \varepsilon_i; \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

тобто *початкові значення відхилень* x_i *є збуреннями системи*.

Визначення стійкості за Ляпуновим

Якщо для будь-якої сфери скільки завгодно малого радіуса ε *можна знайти іншу сферу скінченого радіуса* δ *таку, що в разі розташування збурень в середині останньої сфери*

$$\sum_{i=1}^{n} x_{0i}^2 \le \delta^2$$

зображувальна точка M *протягом усього наступного руху розміщуватиметься в середині першої сфери*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) < \varepsilon^2 ,$$

то незбурений рух є стійким, в іншому разі – нестійким.

Стійкість незбуреного руху означає, що за досить малих збурень збурений рух буде скільки завгодно мало відрізнятися від незбуреного. Якщо ж незбурений рух нестійкий, то збурений рух буде віддалятися від нього з плином часу необмежено, якими малими не були б початкові збурення.

Якщо незбурений рух стійкий і при цьому збурений рух за досить малих початкових збурень наближається з плином часу до незбуреного, тобто

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) = 0,$$

то незбурений рух є *асимптотично стійким*.

Може виявитися, що рух є стійким за одних змінних і нестійким за інших. Наприклад, можна показати, що рух штучного супутника Землі є стійким відносно його радіус-вектора (орбітальна стійкість) і нестійкий відносно кутового його положення на орбіті. Тому, кажучи про стійкість руху, необхідно завжди вказувати, відносно яких величин розглядається стійкість.

У випадках, коли рух є асимптотично стійким за будь-яких збурень (не обов'язково малих), він називається асимптотично стійким *у цілому*.

Іноді стійкість спостерігається не за будь-яких збурень, а за збурень, які підпорядковуються деяким умовам. Така стійкість називається *умовною*.

Для виведення рівнянь збуреного руху запишемо рівняння (6.1) так:

$$\frac{df_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = z_i(f_1 + x_1, \cdots, f_n + x_n, t).$$

Розкладемо праві частини цих рівнянь у ряд Тейлора за степенями відхилень x_i, припускаючи аналітичність функцій z_i від змінних y_i:

$$\frac{df_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = z_i(f_1, \cdots, f_n, t) + \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_1}\right)_{x=0} x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_n}\right)_{x=0} x_n + X_i^*,$$

де X_i^* – сукупність членів, що залежать від відхилень x_i у степені, вищому, ніж першому.

Урахуємо, що у незбуреному русі функції $f_i(t)$ як частинні розв'язки задовольняють рівняння (6.1):

$$\frac{df_i}{dt} = z_i(f_1, \cdots, f_n, t); \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

На підставі цього матимемо

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + X_i^*; \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{6.6}$$

де

$$a_{ik} = \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right)_{x=0}$$

у загальному випадку є функціями часу t, зокрема вони можуть бути сталими.

Рівняння (6.6) називають *диференціальними рівняннями збуреного руху*. Якщо з цих рівнянь вилучити члени X_i^* (їх називають членами вищого порядку мализни), то отримані в результаті рівняння

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n; \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

називають *рівняннями першого наближення*.

Рівняння першого наближення часто дозволяють отримати вірну відповідь на питання про стійкість руху, але також дуже часто висновок, якого можна дійти на основі цих наближених рівнянь, нічого спільного не має з розв'язком початкових рівнянь. Для визначення стійкості за рівняннями першого наближення прислуговуються такі дві теореми Ляпунова.

Теорема Ляпунова про стійкість руху за першим наближенням:

Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння першого наближення є від'ємними, то незбурений рух є асимптотично стійким незалежно від членів вищого порядку мализни.

Теорема Ляпунова про нестійкість руху за першим наближенням:

Якщо серед коренів характеристичного рівняння першого наближення є хоча б один з додатною дійсною частиною, то незбурений рух є нестійким незалежно від членів вищого порядку мализни.

Прямий метод Ляпунова. Одним з найефективніших методів дослідження стійкості руху нелінійних систем є прямий метод Ляпунова. Його часто називають також другою методою Ляпунова.

Вивчення прямого методу почнемо з розгляду деяких дійсних функцій $V(x)=V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ відхилень x_i, визначених у зоні простору

$$\sum_{i=1}^{n} x_{0i}^2 \le \mu, \tag{6.7}$$

де μ – стале додатне число.

Припускаємо, що в зоні (3.34) ці функції є однозначними, неперервними і обертаються в нуль, коли всі $x_1, x_2, \cdots, x_n$ дорівнюють нулю:

$$V(0)=0. \tag{6.8}$$

Якщо в околі початку координат функція V, окрім нуля, може набувати значення лише одного знака, то її називають *знакосталою* (відповідно *додатною* або *від'ємною*). Якщо ж знакостала функція обертається у нуль лише у випадку, коли всі $x_1, x_2, \cdots, x_n$ дорівнюють нулю, то така функція V називається *знакопевною* (відповідно *певнододатною* або *певновід'ємною*). Як неважко збагнути, знакопевна функція має екстремум при $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ (мінімум – певнододатна і максимум – певновід'ємна). Знакостала ж функція екстремуму не має тому, що в околі початку координат існують точки, в яких функція V набуває нульових значень.

Уведені у такий спосіб функції $V(x)$, використовувані для дослідження стійкості руху, називають *функціями Ляпунова*.

Нехай функція $V(x)$ є неперервною разом із похідними першого порядку і крім того – знакопевною. Тоді у точці $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ вона має ізольований екстремум, а отже, усі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю (необхідні умови існування екстремуму):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_{x=0} = 0; \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.9}$$

Розкладемо функцію V у ряд Маклорена за степенями $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$V = V(0) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_{x=0} x_i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_i}\right)_{x=0} x_k x_i + \cdots,$$

де точками позначені члени вищого порядку. Враховуючи співвідношення (6.8) і (6.9), дістанемо:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_k x_i + \cdots . \tag{6.10}$$

Тут сталі числа $c_{ki} = c_{ik}$ визначено рівностями

$$c_{ki} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_i} \right)_{x=0} .$$

Із формули (6.10) випливає, що розклад функції V у ряд за степенями $x_1, x_2, \cdots, x_n$ не має членів першого степеня.

Припустимо, що квадратична форма

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_k x_i \tag{6.11}$$

набуває додатних значень і в нуль обертається лише за умови $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Тоді, незалежно від членів вищого порядку, за достатньо малих за модулем x_i функція V набуватиме теж додатних значень і обертатиметься у нуль лише якщо $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Отже, якщо квадратична форма (6.11) є певнододатною, то й функція V буде певнододатною.

Розглянемо матрицю коефіцієнтів квадратичної форми (6.11):

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

і складемо з неї n головних діагональних мінорів

$$\Delta_1 = c_{11}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}; \; \ldots \; \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6.12}$$

У лінійній алгебрі доводиться такий ***критерій Сильвестра***: *для того, щоб квадратична форма була певнододатною, необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори* (6.12) *матриці її коефіцієнтів були додатними*

$$\Delta_1 > 0; \qquad \Delta_2 > 0; \qquad \ldots \qquad \Delta_n > 0. \tag{6.13}$$

Отже, виконання критерію Сильвестра (6.12) для квадратичної частини функції Ляпунова є достатньою (але не необхідною) умовою певнододатності самої функції.

Для дослідження стійкості руху прямим методом Ляпунова використовують основні теореми стійкості, які ми наведемо без доведення.

Теорема Ляпунова про стійкість руху. *Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху можна знайти таку знакопевну функцію V* відхилень, *похідна $\frac{dV}{dt}$ від якої внаслідок цих рівнянь є знакосталою функцію протилежного знака з V, або тотожно дорівнює нулю, то незбурений рух є стійким.*

Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість. *Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху можна знайти таку знакопевну функцію* V, *похідна* $\frac{dV}{dt}$ *від якої внаслідок цих рівнянь була б знакопевною функцію протилежного знака з* V *, то незбурений рух є асимптотично стійким.*

Теорема Четаєва. *Якщо диференціальні рівняння збуреного руху дають змогу знайти функцію* V , *для якої у скільки завгодно малому околі нуля існує зона* $V > 0$, *і якщо похідна* $\frac{dV}{dt}$ *функції внаслідок цих рівнянь є певнододатною або обмеженою у зоні* $V > 0$ *, то незбурений рух є нестійким.*

Зазначимо, що ці теореми дають змогу дослідити стійкість щодо всієї сукупності змінних, які входять у рівняння збуреного руху.

Використання основних теорем прямого методу Ляпунова потребує знання (або створення, побудови) функцій, які мають певні властивості. На жаль, загальних методів побудови таких функцій немає. Однак у багатьох випадках такі функції можна сконструювати, якщо відомі інтеграли рівнянь збуреного руху.

Припустимо, що рівняння (6.6) збуреного руху допускають інтеграл

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = h = \text{const}, \tag{6.14}$$

для якого різниця $F(x) - F(0)$ є певнододатною функцією змінних $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Тоді як функцію Ляпунова можна прийняти функцію

$$V = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) - F(0). \tag{6.15}$$

Справді, похідна за часом функції V унаслідок рівнянь збуреного руху згідно з інтегралом (6.14) тотожно дорівнює нулю, а тому ця функція задовольнятиме всі умови теореми Ляпунова про стійкість руху.

Інколи диференціальні рівняння збуреного руху припускають кілька інтегралів

$$F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = h_1; \quad \cdots \quad F_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = h_m,$$

де $h_1, \quad \cdots \quad h_m$ – сталі інтегрування, причому жоден з них не є певнододатною функцією. Для такого випадку М. Г. Четаєв запропонував шукати функцію V у формі в’язки інтегралів (6.14) такого вигляду:

$$\begin{aligned} V = \lambda_1[F_1 - F_1(0)] + \cdots + \lambda_m[F_m - F_m(0)] + \\ + \chi_1[F_1^2 - F_1^2(0)] + \cdots + \chi_m[F_m^2 - F_m^2(0)] \end{aligned}, \tag{6.16}$$

де $\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \chi_1, \cdots, \chi_m$ – невизначені сталі. Якщо сталі λ, χ вдається підібрати так, що функція (6.16) буде певнододатною, то вона задовольнятиме усі умови теореми Ляпунова.

Метод Четаєва побудови функції Ляпунова за допомогою в’язки інтегралів – дуже ефективний. При цьому слід зауважити таке:

– один з коефіцієнтів λ, χ можна обрати довільно, наприклад, покладаючи $\lambda_1 = 1$;

– часто функцію V можна побудувати за допомогою лінійної в’язки інтегралів, покладаючи усі $\chi_i = 0$;

– члени з квадратами інтегралів слід використовувати лише в разі, якщо лінійна в’язка недостатня;

– часто інтеграли рівнянь збуреного руху можна будувати, виходячи із загальних міркувань (наприклад, за допомогою загальних теорем механіки), не складаючи самих рівнянь; цей спосіб слід широко використовувати, уникаючи зайвих перетворень.

Контрольні запитання

1. Що таке стійкість руху? Як визначається стійкість за Ляпуновим?
2. Що називають прямим методом Ляпунова? У чому він полягає? Яки його переваги і недоліки?
3. Що таке перший метод Ляпунова? У чому він полягає? Яки його переваги і недоліки?
4. Що називають другою методою Ляпунова? У чому вона полягає? Яки її переваги і недоліки?
5. Що таке функція Ляпунова? Яке значення вона має для аналізу стійкості руху?
6. На які теореми спирається друга метода Ляпунова?
7. Як побудувати функцію Ляпунова?
8. У чому полягає критерій Сильвестра?
9. Яку функцію називають знакосталою? знакопевною? Чим вони вирізняються?
10. Чим відрізняються гладкі нелінійності від суттєвих?
11. Що називають незбуреним рухом? збуреним рухом?
12. Що таке фазові змінні системи?
13. Що в теорії Ляпунова розуміють під варіаціями?
14. Що таке асимптотична стійкість? стійкість у цілому? умовна стійкість?
15. Що означає поняття "рівняння збуреного руху"? "рівняння першого наближення"? автономна система"?

Лекція 7. Необхідна і достатня умова стійкості дзиґи

Відомо, що дзиґа, яка не обертається, падає, і щоб її вісь утримувалася у вертикальному положенні, дзизі потрібно надати досить великої швидкості власного обертання. Артилеристи також знають, що довгастий снаряд, що не обертається, тобто його випущено з гладкоствольної гармати, перекидається, у той час як снаряд, якого випущено з нарізної гармати, тобто якому при пострілі надається велика кутова швидкість навколо його осі симетрії, у польоті стійкий, його вісь завжди прагне суміститися з дотичною до траєкторії.

Виникає питання: яку кутову швидкість власного обертання потрібно надати дзизі (снаряду), щоб вона не падала (снаряд не перекидався).

Оскільки обертальний рух довгастого снаряда, центр мас якого переміщується уздовж настильної траєкторії, і рух дзиґи навколо вертикалі описується однаковими диференціальними рівняннями, достатньо розглянути стійкість руху одного з них, наприклад, стійкість дзиґи.

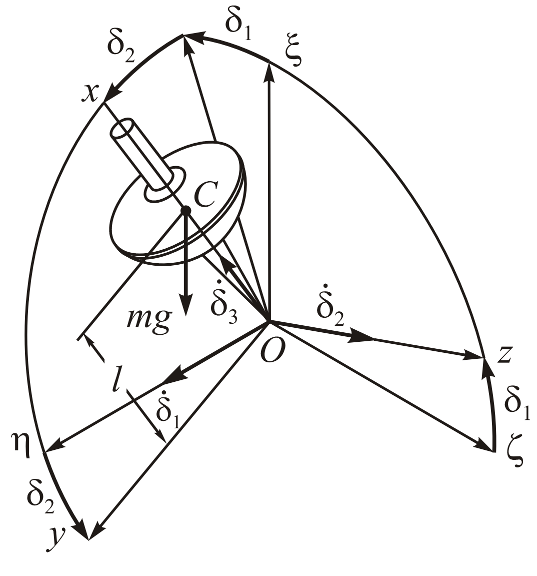

Рис. 7.1. Кінематика дзиґи

На дзиґу (див. рис. 7.1), кутова швидкість власного обертання якої $\dot{\delta}_3$, діють дві зовнішні сили (силами опору нехтуємо): сила тяжіння $\mathbf{P}$, прикладена до центра мас C дзиґи, і реакція $\mathbf{R}$ опори O. Незбуреним рухом, стійкість якого досліджується, вважатимемо рівномірне обертання з кутовою швидкістю $\dot{\delta}_3 = n$ навколо осі симетрії x, коли та збігається з вертикаллю ξ.

У незбуреному русі виконуються співвідношення:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0; \qquad \dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_2 = 0; \qquad \dot{\delta}_3 = n = \text{const}.$$

Для збуреного руху ці величини будуть змінюватися. Кінетична енергія дзиґи визначатиметься виразом

$$2T = (J_e + ml^2)(\omega_Y^2 + \omega_Z^2) + J\omega_X^2,$$

де J_e – екваторіальний момент інерції дзиґи відносно центра мас C; m – маса дзиґи; l – відстань від центра мас C до точки підвісу O; $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ – проекції абсолютної кутової швидкості дзиґи на осі Резаля xyz (див. рис. 7.1); J – осьовий момент інерції дзиґи.

Задля спрощення позначимо: $J'_e = J_e + ml^2$. З урахуванням виразів проекцій кутової швидкості матимемо:

$$T = \frac{H^2}{2J} + \frac{1}{2}J'_e(\dot{\delta}_1^2\cos^2\delta_2 + \dot{\delta}_2^2), \qquad H = J(\dot{\delta}_3 + \dot{\delta}_1\sin\delta_2).$$

Потенціальна енергія визначається виразом

$$\Pi = Pl\cos\delta_1\cos\delta_2.$$

У розглядуваному випадку можна, не складаючи рівнянь руху, знайти три інтеграли руху.

Два інтеграли визначаються одразу – це інтеграл енергії та інтеграл моменту імпульсу дзиґи відносно осі її власного обертання. Оскільки інші зовнішні сили, крім зумовлених гравітацією, на дзиґу не діють, то сума кінетичної і потенціальної енергій зберігається незмінною увесь час руху: $T + \Pi = h$. Окрім того, закон моментів стверджує, що $d\mathbf{K}_O/dt = \mathbf{M}_O$, де $\mathbf{K}_O$ – кінетичний момент; $\mathbf{M}_O$ – момент зовнішніх сил, а навколо осі x власного обертання дзиґи моменти сил не діють, тому

$$\frac{dK_X}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dH}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = H_0 \quad \Rightarrow \quad J(\dot{\delta}_3 + \dot{\delta}_1\sin\delta_2) = Jn_1,$$

де $n_1 = \dot{\delta}_{30} + \dot{\delta}_{10}\sin\delta_{20}$.

Третій інтеграл – це інтеграл моменту імпульсу навколо вертикалі. Оскільки навколо вертикалі ξ сила тяжіння (єдина зовнішня сила) не утворює моменту, то

$$\frac{dK_\xi}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_\xi = K_{\xi_0} \quad \Rightarrow \quad K_\xi = K = const.$$

Відшукаємо K_ξ. Оскільки маємо

$$K_\xi = K_X\cos(x,\xi) + K_Y\cos(y,\xi) + K_Z\cos(z,\xi),$$

а $K_X = H = J(\dot{\delta}_3 + \dot{\delta}_1\sin\delta_2)$; $K_Y = J'_e\dot{\delta}_1\cos\delta_2$; $K_Y = J'_e\dot{\delta}_2$, то, користуючись рис. 7.1 для визначення напрямних косинусів, отримаємо:

$$K_\xi = J(\dot{\delta}_3 + \dot{\delta}_1\sin\delta_2)\cos\delta_1\cos\delta_2 + J'_e(\dot{\delta}_2\sin\delta_1 - \dot{\delta}_1\cos\delta_1\sin\delta_2\cos\delta_2) = K.$$

Далі вивчатимемо стійкість руху дзиґи з величин δ_1, δ_2, $\dot{\delta}_1$, $\dot{\delta}_2$, $\dot{\delta}_3$. Уведемо такі позначення варіацій:

$$x_1 = \delta_1; \qquad x_2 = \dot{\delta}_1; \qquad x_3 = \delta_2; \qquad x_4 = \dot{\delta}_2; \qquad x_5 = \dot{\delta}_3 - n.$$

Тепер інтеграли збуреного руху набудуть вигляду:

$$F_1 = \frac{1}{2}J'_e(x_2^2\cos^2 x_3 + x_4^2) + \frac{1}{2}J(n + x_5 + x_2\sin x_3)^2 + Pl\cos x_1\cos x_3 = h;$$

$F_2 = n + x_5 + x_2 \sin x_3 = n_1$;

$F_3 = J(n + x_5 + x_2 \sin x_3)\cos x_1 \cos x_3 + J'_e(x_4 \sin x_1 - x_2 \cos x_1 \sin x_3 \cos x_3) = K$.

Через те, що жоден із цих інтегралів не є знакопевною функцією, складемо лінійну в'язку інтегралів: $V = F_1 - F_1(0) + \mu[F_2 - F_2(0)] + \lambda[F_3 - F_3(0)]$, де μ і λ – невизначені сталі коефіцієнти. Підставимо у неї значення F_1, F_2, F_3, розкладемо їх у ряд за степенями x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Після групування членів матимемо:

$$V = [J(n+\lambda) + \mu]x_5 - \frac{1}{2}(Pl + \lambda Jn)x_1^2 + \frac{1}{2}J'_e x_2^2 - \frac{1}{2}(Pl + \lambda Jn)x_3^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}J'_e x_4^2 + \frac{1}{2}Jx_5^2 + [J(n+\lambda) + \mu - \lambda J'_e]x_2 x_3 + \lambda J'_e x_1 x_4 + \cdots,$$

де крапками позначено члени вищого (більшого від другого) порядку.

Для того, щоб функція V була знакопевною, необхідно, насамперед, забезпечити рівність нулю коефіцієнта при першому степені x_5:

$$J(n+\lambda) + \mu = 0.$$

З врахуванням цього V набуває вигляду:

$$V = \frac{1}{2}a(x_1^2 + x_3^2) + \frac{1}{2}J'_e(x_2^2 + x_4^2) + \frac{1}{2}Jx_5^2 + \lambda J'_e(x_1 x_4 - x_2 x_3) + \cdots,$$

де

$$a = -(Pl + \lambda Jn). \tag{7.1}$$

Розкладемо квадратичну частину функції V на три функції:

$$V_1 = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}J'_e x_4^2 + \lambda J'_e x_1 x_4; \quad V_2 = \frac{1}{2}ax_3^2 + \frac{1}{2}J'_e x_2^2 - \lambda J'_e x_2 x_3; \quad V_3 = \frac{1}{2}Jx_5^2.$$

Функція V_3 є певнододатною відносно x_5, а функції V_1 і V_2 мають однакову структуру. Тому згідно із загальною теорією для забезпечення стійкості незбуреного руху дзиґи відносно величин δ_1, δ_2, $\dot{\delta}_1$, $\dot{\delta}_2$, $\dot{\delta}_3$ достатньо визначити умову, за якої функція V_1 буде певнододатною відносно величин x_1, x_4 (за такої ж умови функція V_2 буде певнододатною відносно величин x_2, x_3).

Запишемо умову Сильвестра для функції V_1:

$$\Delta_1 = a > 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & \lambda J'_e \\ \lambda J'_e & J'_e \end{vmatrix} = J'_e(a - \lambda^2 J'_e) > 0.$$

Користуючись виразом (3.44), зведемо ці нерівності до такого виду:

$$-(Pl + \lambda Jn) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda < -\frac{Pl}{Jn}; \tag{7.2}$$

$$(a - \lambda^2 J'_e) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(\lambda) = J'_e\lambda^2 + Jn\lambda + Pl < 0. \tag{7.3}$$

Залишилося з'ясувати умови, реалізуючі які, можна підібрати значення λ, що задовольняють умови (7.2) і (7.3).

Якщо дискримінант $D = J^2n^2 - 4J'_e Pl$ тричлена $f(\lambda)$ додатний, то обидва корені (рис. 7.2) рівняння $f(\lambda) = 0$ будуть дійсні й різні.

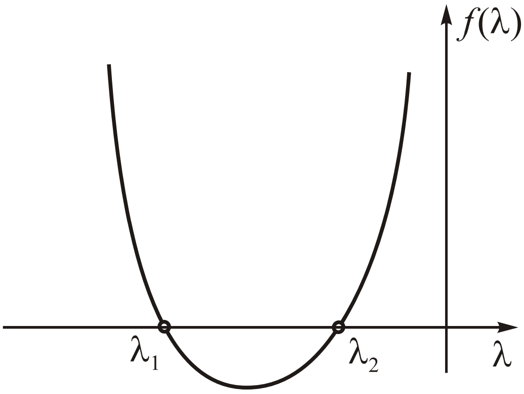

Рис. 7.2. Графік функції $f(\lambda)$

Із графіка функції (рис. 7.2) видно, що для усіх λ, що задовольняють нерівності $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, функція $f(\lambda) < 0$, тобто буде виконуватися умова (7.3). Якщо $n > 0$, обидва корені є від'ємними (випадок, зображений на рис. 7.2), а якщо $n < 0$ обидва корені додатні.

Якщо другий визначник Сильвестра додатний, то, як випливає з розгляду (7.3), через те, що $J_e' = J_e + ml^2$ завжди додатний, автоматично забезпечується й додатність першого визначника Сильвестра:

$$a > J_e'\lambda^2 > 0 .$$

Отже, якщо кутова швидкість власного обертання дзиґи у незбуреному русі задовольняє умову $D > 0$, тобто

$$J^2 n^2 > 4J_e' Pl , \tag{7.4}$$

то для усіх λ, що містяться між λ_1 і λ_2, функція V буде певнододатною. Її похідна за часом унаслідок рівнянь збуреного руху на основі інтегралів руху дорівнюватиме нулю. Отже, *нерівність* (7.4) *є достатньою умовою стійкості вертикального положення дзиґи* відносно величин δ_1, δ_2, $\dot{\delta}_1$, $\dot{\delta}_2$, $\dot{\delta}_3$. Для швидкообертового снаряду в умові (7.4) потрібно замінити добуток Pl на модуль моменту перекидальної пари сил, зумовленої опором набіжного потоку повітря.

Залишається нез'ясованим питання про стійкість вертикального положення дзиґи, якщо кутова швидкість власного її обертання у незбуреному русі буде менша за межову величину, що визначена нерівністю (3.47). Покажемо, що *при протилежному сенсі цієї нерівності усталений рух дзиґи* (обертовий рух снаряда) *буде нестійким*.

Скористаємося для цього рівняннями руху дзиґи:

$$\begin{cases} J_e\ddot{\delta}_1\cos^2\delta_2 - 2J_e\dot{\delta}_1\dot{\delta}_2\sin\delta_2\cos\delta_2 + H\dot{\delta}_2\cos\delta_2 = \\ = mgl\sin\delta_1\cos\delta_2 + M_\eta - M_X\sin\delta_2 \\ J_e\ddot{\delta}_2 + J_e\dot{\delta}_1^2\sin\delta_2\cos\delta_2 - H\dot{\delta}_1\cos\delta_2 = mgl\sin\delta_2\cos\delta_1 + M_Z \\ \dfrac{dH}{dt} = M_X \end{cases} \tag{7.5}$$

Вважатимемо, що в них усі моменти зовнішніх сил, за винятком сил тяжіння, дорівнюють нулю. З третього рівняння (7.5) випливає $H = H_0 = Jn$. Розглядаючи лише малі відхилення від вертикалі, перейдемо до лінеаризованих рівнянь руху дзиґи:

$$\begin{cases} J'_e\ddot{\delta}_1 + H_0\dot{\delta}_2 - Pl\delta_1 = 0; \\ J'_e\ddot{\delta}_2 - H_0\dot{\delta}_1 - Pl\delta_2 = 0. \end{cases} \tag{7.6}$$

Ці рівняння є одночасно й рівняннями першого наближення у варіаціях. Складемо характеристичне рівняння для системи (7.6) рівнянь першого наближення:

$$\begin{vmatrix} J'_e p^2 - Pl & Jnp \\ -Jnp & J'_e p^2 - Pl \end{vmatrix} = 0,$$

або, більш розгорнуто:

$$J'^2_e p^4 + (J^2 n^2 - 2J'_e\, Pl)p^2 + P^2 l^2 = 0. \tag{7.7}$$

Для дослідження стійкості дзиґи можна використати теорему Ляпунова про нестійкість за першим наближенням. Критерій Гурвіца для рівняння (7.7) не можна застосовувати, бо кілька коефіцієнтів характеристичного рівняння дорівнюють нулю і жоден з визначників не має від'ємного значення.

Кожному кореню $p = \nu \pm j\mu$ рівняння (7.7) відповідає корінь $p = -\nu \pm j\mu$ (змінна p у рівняння входить лише у парному степені). Тому, якщо дійсна частина хоча б одного кореня не дорівнює нулю, то обов‘язково знайдеться корінь, дійсна частина якого є додатною. Згідно з теоремою Ляпунова про нестійкість за першим наближенням незбурений рух у цьому випадку буде нестійким. Отже, для стійкості незбуреного руху дзиґи необхідно, щоб усі корені характеристичного рівняння (7.7) були суто уявними, тобто мали вигляд $p = j\mu$, а величини квадратів коренів p^2 – дійсними від'ємними числами. Але для цього треба, щоб дискримінант D рівняння (7.7) відносно p^2 був додатним:

$$D = (J^2 n^2 - 2J'_e\, Pl)^2 - 4J'^2_e P^2 l^2 = J^2 n^2 (J^2 n^2 - 4J'_e\, Pl) > 0.$$

Звідси видно, що у випадку протилежного змісту нерівності (7.4) дискримінант D буде від'ємним, отже, усталений рух дзиґи (обертальний рух снаряду) виявляється нестійким.

Контрольні запитання

1. Якою є умова стійкості верхнього вертикального положення дзиґи? стійкості обертового снаряду?

Лекція 8. Стійкість стаціонарних рухів

Існує великий клас механічних систем, для яких деякі узагальнені координати не входять явно ані у вираз кінетичної енергії, ані у вираз потенціальної енергії, а узагальнені сили, що відповідають цим координатам, дорівнюють нулю. Такі координати називають *циклічними*, а решту узагальнених координат –

позиційними, або *визначальними* (вони визначають положення (позицію) механічної системи у просторі).

Так, при розгляданні руху дзиґи координата δ_3 (кут повороту дзиґи навколо осі її власного обертання) є циклічною, а кути δ_1 та δ_2, які визначають положення осі дзиґи у просторі, – позиційними.

Для систем з гіроскопами циклічними найчастіше є кутові координати, які характеризують власне обертання роторів гіроскопів.

Нехай $q_1,...,q_s$ – позиційні, а $\varphi_1,...,\varphi_m$ – циклічні координати системи. Запишемо рівняння Лагранжа для циклічних координат:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} = Q_{\varphi i}; \qquad (i = 1,\cdots,m). \tag{8.1}$$

Відповідно до визначення циклічних координат маємо $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \varphi_i} \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} \equiv Q_{\varphi i} \equiv 0$. Отже, рівняння Лагранжа (8.1) для циклічних координат набувають вигляду:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\varphi}_i} = 0; \qquad (i = 1,\cdots,m).$$

Ці рівняння, вочевидь, припускають перші інтеграли:

$$p_i = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\varphi}_i} = c_i = \text{const}; \qquad (i = 1,\cdots,m), \tag{8.2}$$

де p_i – узагальнені імпульси (кінетичні моменти, моменти кількості руху), що відповідають певним циклічним координатам. Рівняння (3.51) показують, що узагальнені імпульси, що відповідають циклічним координатам, залишаються сталими протягом усього часу руху.

Перші інтеграли (8.2) можна використати для перетворення рівнянь Лагранжа для позиційних координат. Таке перетворення належить Раусу і носить його ім'я. Не зупиняючись на доведенні, наведемо його результати.

Ліві частини інтегралів (8.2) містять циклічні швидкості $\dot{\varphi}_i$ лінійно, оскільки T є квадратичною функцією швидкостей. Виразимо з m перших інтегралів (8.2) усі $\dot{\varphi}_i$ через q_k і $\dot{q}_k$ ($k = 1, 2,\cdots, s$) і внесемо їх далі у вираз для кінетичної енергії. Результат позначимо через T^*, після чого складемо *функцію Рауса* згідно з формулою:

$$R = \mathrm{T}^* - \sum_{i=1}^{m} c_i \dot{\varphi}_i . \tag{8.3}$$

У вираз (8.3) замість циклічних швидкостей $\dot{\varphi}_i$ треба підставити їх значення, отримані з перших інтегралів (8.2). Рівняння для позиційних координат q_i набувають вигляду (припускається, що сили, діючи на систему, є потенціальними, у противному разі у праві частини потрібно додати ще й узагальнені сили Q_{qk}):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0; \qquad (k = 1, \cdots, s). \tag{8.4}$$

Функція Рауса не містить циклічних координат та їх швидкостей і залежить лише від q_k і $\dot{q}_k$. Тому рух у позиційних координатах можна вивчати за рівняннями (8.4), ігноруючи циклічні координати (певна річ, доти, доки розглядається лише рух з позиційних координат). У зв'язку з цим *рух у циклічних координатах називають прихованим рухом*, самі *циклічні координати – прихованими* або *ігноровними*, а *рух з позиційних координат – явним* рухом.

Приклад 1. Виконаємо перетворення Рауса для рівнянь вільного руху дзиґи у кутах осциляції.

У цьому випадку всі моменти зовнішніх сил, що діють на дзиґу, вважаємо рівними нулю (окрім моменту сили тяжіння). З третього рівняння (7.5) при цьому випливає, що координата δ_3 є циклічною, тому

$$p = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\delta}_3} = H = J(\dot{\delta}_3 + \dot{\delta}_1 \sin\delta_2) = H_0 .$$

Звідси виходить $\dot{\delta}_3 = H_0 / J - \dot{\delta}_1 \sin\delta_2$. Знаходимо функцію Рауса:

$$R = \mathrm{T}^* - H_0\dot{\delta}_3 = \frac{1}{2}J_e'(\dot{\delta}_1^2\cos^2\delta_2 + \dot{\delta}_2^2) + \frac{H_0^2}{2J} - H_0(H_0/J - \dot{\delta}_1\sin\delta_2) =$$

$$= -\frac{H_0^2}{2J} + H_0\dot{\delta}_1\sin\delta_2 + \frac{1}{2}J_e'(\dot{\delta}_1^2\cos^2\delta_2 + \dot{\delta}_2^2).$$

Тепер, виконуючи операції відповідно до рівнянь (8.4), величину H_0 (на відміну від H у рівняннях Лагранжа) можна розглядати як не залежну від узагальнених координат і швидкостей. В результаті дійдемо таких рівнянь руху дзиґи:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[J_e'\dot{\delta}_1\cos^2\delta_2 + H_0\sin\delta_2] = mgl\sin\delta_1\cos\delta_2 \\ J_e'\ddot{\delta}_2 + J_e'\dot{\delta}_1^2\sin\delta_2\cos\delta_2 - H_0\dot{\delta}_1\cos\delta_{21} = mgl\sin\delta_2\cos\delta \end{cases}.$$

Приклад 2. Виконаємо такі самі операції, використовуючи як узагальнені координати кути Ейлера. Рівняння руху дзиги у цьому випадку матимуть вигляд:

$$\begin{cases} J_e\ddot{\psi}\sin^2\vartheta + 2J_e\dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta - H\dot{\vartheta}\sin\vartheta = M_\xi - M_X\cos\vartheta \\ J_e\ddot{\vartheta} - J_e\dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta + H\dot{\psi}\sin\vartheta = mgl\sin\vartheta + M_Y \\ \dfrac{dH}{dt} = M_X \end{cases}$$

Кінетична енергія дзиґи у цьому випадку визначається виразом

$$\mathrm{T} = \frac{H^2}{2J} + \frac{1}{2}J_e(\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2), \qquad H = J(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta),$$

а потенціальна енергія – формулою

$$\Pi = mgl\cos\vartheta .$$

Обидві енергії не залежать не тільки від кута ротації φ, але й від кута прецесії ψ. Тому у розглядуваному поданні маємо дві циклічні координати (за умови дії лише сили тяжіння) – φ і ψ. Визначальною координатою залишається лише одна – кут нутації ϑ.

Маємо два перші інтеграли:

$$p_1 = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot\psi} = J'_e \dot\psi \sin^2\vartheta + H\cos\vartheta = K_{\xi 0} = \mathrm{const}.$$

$$p_2 = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot\varphi} = H = J(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta) = H_0 = \mathrm{const}.$$

з яких визначимо циклічні кутові швидкості:

$$\dot\psi = \frac{K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta}{J'_e \sin^2\vartheta}; \qquad \dot\varphi = \frac{H_0}{J} - \cos\vartheta \frac{K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta}{J'_e\sin^2\vartheta}.$$

Підставимо ці співвідношення у вираз (2.43) кінетичної енергії

$$2\mathrm{T} = \frac{H_0^2}{J} + J'_e\dot\vartheta^2 + \frac{(K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta)^2}{J'_e\sin^2\vartheta}.$$

і складемо функцію Рауса

$$R = \mathrm{T}^* - H_0\dot\varphi - K_{\xi 0}\dot\psi = \frac{H_0^2}{2J} + \frac{1}{2}J'_e\dot\vartheta^2 + \frac{(K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta)^2}{2J'_e\sin^2\vartheta} -$$

$$- H_0\left(\frac{H_0}{J} - \cos\vartheta\frac{K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta}{J'_e\sin^2\vartheta}\right) - K_{\xi 0}\frac{K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta}{J'_e\sin^2\vartheta} =$$

$$= -\frac{H_0^2}{2J} + \frac{1}{2}J'_e\dot\vartheta^2 - \frac{(K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta)^2}{2J'_e\sin^2\vartheta}.$$

Рівняння руху дзиґи з єдиної позиційної координати ϑ відповідно до (8.4) матиме вигляд

$$J'_e\ddot\vartheta + \frac{(K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta)(H_0 - K_{\xi 0}\cos\vartheta)}{J'_e\sin^3\vartheta} - mgl\sin\vartheta = 0.$$

Зупинимось більш докладно на структурі функції Рауса. В ній можна виокремити три складові частини:

$$R = R_2 + R_1 + R_0,$$

де

$$R_2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} a_{ki}\dot q_k \dot q_i\right)$$

– квадратична функція швидкостей,

$$R_1 = \sum_{i=1}^{s} a_i \dot q_i$$

– лінійна частина функції Рауса, а R_0 – частина, яка не залежить від швидкостей. У цих рівностях коефіцієнти $a_{ki} = a_{ik}$, a_i, а також R_0 – функції лише позиційних координат. Не зупиняючись на доведенні, відзначимо, що квадратична форма R_2 є певнододатною.

Із врахуванням зазначеного рівняння (8.4) можна подати так

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + \frac{\partial R_0}{\partial q_k} - \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R_1}{\partial q_k} \right\}; \quad (k = 1, \cdots, s). \tag{8.5}$$

Користуючись формулою

$$\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{i=1}^{s} a_i \dot{q}_i \right) = a_k$$

і враховуючи, що a_k складним чином залежать від часу через q_1, ..., q_s, дістаємо згідно з правилом диференціювання складних функцій:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}[a_k(q_1, ..., q_s)] = \frac{\partial a_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial a_k}{\partial q_i}\dot{q}_i .$$

Знайдемо тепер частинну похідну від R_1 за узагальненою координатою:

$$\frac{\partial R_1}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{i=1}^{s} a_i \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial a_i}{\partial q_k}\dot{q}_i .$$

Отже, вираз у фігурних дужках у рівняннях (3.54) можна подати так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R_1}{\partial q_k} = \frac{\partial a_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial a_k}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial q_k} \right)\dot{q}_i = \frac{\partial a_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} g_{ki}\dot{q}_i ,$$

де гіроскопічні коефіцієнти g_{ki} визначено рівностями

$$g_{ki} = \frac{\partial a_k}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial q_k}; \qquad (k, i = 1, \cdots, s).$$

Тепер рівняння (8.5) зводяться до таких:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = -\frac{\partial a_k}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{s} g_{ki}\dot{q}_i ; \qquad (k = 1, \cdots, s), \tag{8.6}$$

де

$$W = \Pi - R_0 . \tag{8.7}$$

Рівнянням (8.6) можна співвіднести деяку систему (її називають *зведеною системою*), у якій функції R_2 і W відіграють ролі кінетичної і потенціальної енергій, а узагальнені сили визначаються рівностями

$$Q_k = -\frac{\partial a_k}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{s} g_{ki}\dot{q}_i . \tag{8.8}$$

Останні члени у правій частині (8.6) називають *гіроскопічними силами*:

$$\Gamma_k = \sum_{i=1}^{s} g_{ki}\dot{q}_i . \tag{8.9}$$

З визначення гіроскопічних коефіцієнтів g_{ki} видно, що їх матриця G (взята по сукупності всіх s рівнянь) є кососиметричною:

$$g_{ki} = \frac{\partial a_k}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial q_k} = -\left(\frac{\partial a_i}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_i} \right) = -g_{ik} ,$$

тобто має вигляд

$$G = \begin{bmatrix} 0 & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1s} \\ -g_{12} & 0 & g_{23} & \cdots & g_{2s} \\ -g_{13} & -g_{23} & 0 & \cdots & g_{3s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -g_{1s} & -g_{2s} & -g_{3s} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Зазначимо, що за відсутності гіроскопічних сил (це, зазвичай, буває якщо $R_1 \equiv 0$) система називається *гіроскопічно незв'язаною*.

Основна *властивість гіроскопічних сил* (8.9) полягає у тому, що *вони*, будучи лінійними функціями узагальнених швидкостей позиційних координат, завжди у сукупності *не виконують роботи на дійсних переміщеннях*. Цю властивість покладено в основу їх визначення Томсоном і Тетом. Гіроскопічні сили трапляються не лише у системах з циклічними координатами (окремий випадок їх – системи, що містять гіроскопи), а й в інших фізичних системах.

За деяких умов матеріальна система, яка має m циклічних і s позиційних координат, може здійснювати *стаціонарний рух*, за якого *зберігають постійні значення як усі циклічні швидкості, так і всі позиційні координати*.

Умови, за яких здійснюється стаціонарний рух, легко визначити з таких очевидних міркувань.

Згідно з визначенням у стаціонарному русі всі позиційні координати зберігають сталі значення

$$q_k(t) = q_{k0} = const; \qquad (k = 1, \cdots, s).$$

Це означає, що зведена система перебуває у стані спокою. Але для цього, крім того, що початкові швидкості позиційних координат мають дорівнювати нулю

$$\dot{q}_k(0) = 0; \qquad (k = 1, \cdots, s),$$

необхідно й достатньо, щоб усі узагальнені сили (8.8) також дорівнювали нулю, тобто

$$\left.\frac{\partial a_k}{\partial t}\right|_{q_0} = 0; \qquad \left.\frac{\partial W}{\partial q_k}\right|_{q_0} = 0; \qquad (k = 1, \cdots, s).$$

Беручи до уваги вираз (8.7) для потенціальної енергії зведеної системи, останню умову можна трансформувати до такої:

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}\right|_{q_0} = \left.\frac{\partial R_0}{\partial q_k}\right|_{q_0}; \qquad (k = 1, \cdots, s). \tag{8.10}$$

Отже, для здійсненності стаціонарного руху необхідно і достатньо:

– щоб система була стаціонарною, тобто всі коефіцієнти її рівнянь (параметри системи) не залежали від часу;

– щоб початкові значення швидкостей позиційних координат дорівнювали нулю;

– щоб початкові значення позиційних координат задовольняли умови (8.10).

Зазначимо, що у функцію R_0 входять сталі c_i циклічних інтегралів (8.2), тому значення q_{i0} у стаціонарному русі залежатимуть від значень циклічних швидкостей $\dot{\varphi}_i$, що містяться у c_i.

Перейдемо до визначення умов стійкості стаціонарного руху, який вважатимемо незбуреним рухом. Не порушуючи узагальненості, можна припустити, що у стаціонарному русі всі позиційні координати дорівнюють нулю. Тоді рівняння руху (8.6) зведеної системи будуть диференціальними рівняннями збуреного руху відносно позиційних координат q_k і їх швидкостей $\dot{q}_k$.

Стійкість стаціонарного руху визначають за такими теоремами.

Теорема Рауса. *Якщо у стаціонарному русі потенціальна енергія $W = \Pi - R_0$ зведеної системи має мінімум, то цей рух є стійким з позиційних координат q_k і їх швидкостей $\dot{q}_k$, в усякому разі за збурень, які не порушують циклічних інтегралів* (8.2).

Доповнення Ляпунова до теореми Рауса. *Якщо потенціальна енергія $W = \Pi - R_0$ зведеної системи має мінімум як за наданих $p_i = c_i$, що відповідають розглядуваному стаціонарному руху, так і за досить близьких до наданих значень $p_i = c_i + \eta_i$, де η_i – малі за модулем, причому змінні q_k, які забезпечують мінімум, є неперервними функціями величин p_i, то цей рух є стійким з позиційних координат q_k і їх швидкостей $\dot{q}_k$.*

Примітка. Циклічні інтеграли (8.2) містять позиційні та циклічні швидкості лінійно. Тому зі стійкості стаціонарного руху з позиційних координат q_k і їх швидкостей $\dot{q}_k$ випливає стійкість й відносно циклічних швидкостей $\dot{\varphi}_i$ (але не координат φ_i!).

Теорема Четаєва. *Якщо для ізольованого стаціонарного руху гіроскопічно незв'язаної системи за фіксованих циклічних інтегралів* (8.2) *потенціальна енергія W, яка припускається аналітичною функцією змінних q_k, не має мінімуму, то стаціонарний рух є нестійким.*

При практичному застосуванні теореми Рауса слід мати на увазі, що за виконання її умов функція W буде певнододатною. Тому тут раціонально використовувати звичайний спосіб розкладання функції в ряд з наступним застосуванням критерію Сильвестра.

Стійкість регулярної прецесії дзиґи

Для дослідження стійкості регулярної прецесії дзиґи скористаємося результатами прикладу 2. У кутах Ейлера функцію Рауса можна подати у вигляді

$$R = \frac{1}{2} J'_e \dot{\vartheta}^2 - \frac{(K_{\xi 0} - H_0 \cos\vartheta)^2}{2J'_e \sin^2\vartheta},$$

з якої вилучено несуттєву сталу $\left(-\frac{H_0^2}{2J}\right)$. Очевидно, у розглядуваному випадку

$$R_2 = \frac{1}{2} J'_e \dot{\vartheta}^2; \qquad R_1 = 0; \qquad R_0 = -\frac{(K_{\xi 0} - H_0 \cos\vartheta)^2}{2J'_e \sin^2\vartheta}.$$

Складемо потенціальну енергію зведеної системи:

$$W = \Pi - R_0 = mgl\cos\vartheta + \frac{(K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta)^2}{2J'_e \sin^2\vartheta}$$

й запишемо умову (8.10) здійсненності стаціонарного руху:

$$\left.\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right|_{\vartheta_0} = -mgl\sin\vartheta_0 + \frac{(K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta_0)(H_0 - K_{\xi 0}\cos\vartheta_0)}{J'_e \sin^3\vartheta_0} = 0. \qquad (8.11)$$

Для визначення початкових умов, які задовольняють умову (3.60), підставимо в неї значення $K_{\xi 0}$, а в нього – початкові значення узагальнених координат та їхніх швидкостей. Матимемо:

$$K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta_0 = J'_e\dot\psi_0\sin^2\vartheta_0 + H_0\cos\vartheta_0 - H_0\cos\vartheta_0 = J'_e\dot\psi_0\sin^2\vartheta_0;$$

$$H_0 - K_{\xi 0}\cos\vartheta_0 = H_0 - (J'_e\dot\psi_0\sin^2\vartheta_0 + H_0\cos\vartheta_0)\cos\vartheta_0 =$$

$$= (H_0 - J'_e\dot\psi_0\cos\vartheta_0)\sin^2\vartheta_0;$$

$$\frac{(K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta_0)(H_0 - K_{\xi 0}\cos\vartheta_0)}{J'_e\sin^3\vartheta_0} = \frac{J'_e\dot\psi_0\sin^2\vartheta_0(H_0 - J'_e\dot\psi_0\cos\vartheta_0)\sin^2\vartheta_0}{J'_e\sin^3\vartheta_0} =$$

$$= \dot\psi_0\sin\vartheta_0(H_0 - J'_e\dot\psi_0\cos\vartheta_0).$$

Використовуючи це у співвідношенні (9.1), дійдемо:

$$-\sin\vartheta_0(J'_e\dot\psi_0^2\cos\vartheta_0 - H_0\dot\psi_0 + mgl) = 0.$$

Якщо $\vartheta_0 \neq 0$, то умова стаціонарності руху матиме вигляд

$$J'_e\dot\psi_0^2\cos\vartheta_0 - H_0\dot\psi_0 + mgl = 0.$$

Вона визначає ті значення кутової швидкості прецесії, які забезпечують рівномірне обертання осі власного обертання дзиґи навколо вертикалі по конусу з кутом розхилу ϑ_0. Такий рух називається *регулярною прецесією*. У цілому початкові умови для здійсненності регулярної прецесії дзиґи навколо вертикалі мають такий вигляд:

$$\vartheta(0) = \vartheta_0; \qquad \dot\vartheta(0) = 0; \quad \dot\gamma(0) = \dot\gamma_0; \quad \psi(0) = \psi_0;$$

$$\left(\dot\psi_0\right)_{1,2} = \frac{H_0}{2J'_e\cos\vartheta_0}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mglJ'_e\cos\vartheta_0}{H_0^2}}\right].$$

Дослідимо стійкість регулярної прецесії дзиґи.

Для цього припустимо, що $\vartheta(0) = \vartheta_0 + x$, внесемо це у потенціальну енергію W зведеної системи замість ϑ і розкладемо функцію $W - W_0$ у ряд за степенями відхилення x:

$$W - W_0 = \left.\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta_0} x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 W}{\partial\vartheta^2}\right|_{\vartheta_0} x^2 + \cdots,$$

де крапками позначено члени, які містять x у степені вищому ніж другий.

Перший доданок у правій частині на підставі (3.60) дорівнює нулю.

Другий доданок у результаті перетворень можна подати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} = -mgl\cos\vartheta +$$

$$+\frac{1}{J'_e \sin^6\vartheta}\{\sin^3\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}[(K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta)(H_0 - K_{\xi 0}\cos\vartheta)] -$$

$$-3\sin^2\vartheta\cos\vartheta(K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta)(H_0 - K_{\xi 0}\cos\vartheta)\} =$$

$$= -mgl\cos\vartheta + \frac{1}{J'_e\sin^4\vartheta}\{\sin^2\vartheta(H_0^2 + K_{\xi 0}^2 - 2H_0K_{\xi 0}\cos\vartheta) -$$

$$-3\cos\vartheta(K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta)(H_0 - K_{\xi 0}\cos\vartheta)\}.$$

У точці $\vartheta = \vartheta_0$, з урахуванням (8.11), цей вираз трансформується у такий:

$$\left.\frac{\partial^2 W}{\partial\vartheta^2}\right|_{\vartheta_0} = -mgl\cos\vartheta_0 + \frac{H_0^2 + K_{\xi 0}^2 - 2H_0K_{\xi 0}\cos\vartheta_0}{J'_e\sin^2\vartheta_0} -$$

$$-\frac{3\cos\vartheta_0}{J'_e\sin^4\vartheta}(K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta_0)(H_0 - K_{\xi 0}\cos\vartheta_0) =$$

$$= -\frac{4\cos\vartheta_0}{J'_e\sin^4\vartheta}(K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta_0)(H_0 - K_{\xi 0}\cos\vartheta_0) +$$

$$+\frac{H_0^2 + K_{\xi 0}^2 - 2H_0K_{\xi 0}\cos\vartheta_0}{J'_e\sin^2\vartheta_0} =$$

$$= \frac{1}{J'_e\sin^2\vartheta}\{(K_{\xi 0} - H_0\cos\vartheta_0)^2 + \frac{[H_0(1+\cos^2\vartheta_0) - 2K_{\xi 0}\cos\vartheta_0]^2}{\sin^2\vartheta_0}\}.$$

Оскільки за всіх $\vartheta_0 \neq 0$ і $\vartheta_0 \neq \pi$ коефіцієнт при x^2 є додатним, то функція W має у стаціонарному русі мінімум. Крім того, для всіх ϑ_0 за одних і тих самих умов розв'язок рівняння (8.11) неперервно залежить від сталих H_0 та $K_{\xi 0}$ інтегралів рівнянь. Тому на підставі теореми Рауса і доповнення Ляпунова *регулярна прецесія дзиґи є стійкою* зі змінних ϑ, $\dot\vartheta$, ψ і φ.

Контрольні запитання

1. Що називають функцією Рауса? циклічними координатами? позиційними координатами?
2. Що таке стаціонарний рух системи?
3. Що називають зведеною системою? Які теореми визначають стійкість стаціонарного руху?
4. За яких умов узагальнену координату можна вважати циклічною? позиційною?
5. Який рух називають прихованим? явним?

Лекція 9. Дослідження стійкості за структурою сил

Стійкість руху здебільшого визначається структурою сил, під якими розуміють окремі складові диференціальних рівнянь, що описують рух.

Будемо вважати, що дослідження стійкості руху з величин x_k і $\dot{x}_k$ зводиться до аналізу диференціальних рівнянь збуреного руху, які можна звести до одного матричного рівняння виду:

$$A\ddot{X} + B_1\dot{X} + C_1 X = F\,, \qquad (9.1)$$

де $X = [x_1, x_2, \cdots, x_s]^{\mathrm{T}}$ – матриця-стовпець варіацій узагальнених координат системи; A, B_1, C_1 – відомі квадратні матриці порядку s зі сталими коефіцієнтами; F – матриця-стовпець, $F = [f_1, f_2, \cdots, f_s]^{\mathrm{T}}$ з елементами f_k, які містять x_k і $\dot{x}_k$ у степенях не нижчих від другого, і обертаються у нуль, якщо всі x_k і $\dot{x}_k$ дорівнюють нулю. Крім того, вважатимемо, що матриця A є симетричною і квадратична форма

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\dot{X}^{\mathrm{T}}A\dot{X} = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{x}_1^2 + a_{22}\dot{x}_2^2 + \cdots + a_{ss}\dot{x}_s^2 +$$

$$+2a_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \cdots + 2a_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} a_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k\,; \quad (a_{ik} = a_{ki}) \qquad (9.2)$$

є певнододатною.

Рівнянню (9.1) можна поставити у відповідність деяку матеріальну систему, у якій змінні $x_1, x_2, \cdots, x_s$ є координатами, їх похідні за часом $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_s$ – швидкостями, а квадратична форма (9.2) – кінетичною енергією. Часто ця квадратична форма й насправді є кінетичною енергією реальної системи, але у багатьох випадках форма (9.2) утворюється в результаті перетворень рівнянь руху, як це відбувалося при складанні рівнянь з перетворенням Рауса.

Складові матриць-стовпців у лівій і правій частинах рівняння (9.1) можна трактувати як сили, причому в деяких випадках вони є реальними силами, а в інших – лише деякими членами рівнянь.

Надалі для простоти квадратичну форму (9.2) називатимемо кінетичною енергією, змінні x_k – координатами системи, їх похідні за часом $\dot{x}_k$ – швидкостями, матриці $A\ddot{X}, B_1\dot{X}, C_1X, F$ і їхні елементи – силами. При цьому сили $A\ddot{X}$ називатимемо *силами інерції*, а сили F – *нелінійними силами*. Розкладемо матриці B_1 і C_1 на симетричні і кососиметричні складові:

$$B_1 = B + G\,; \qquad C_1 = C + P\,,$$

де симетричні B і C і кососиметричні G і P матриці визначаються рівностями:

$$B = B^{\mathrm{T}} = \frac{B_1 + B_1^{\mathrm{T}}}{2}\,; \qquad G = -G^{\mathrm{T}} = \frac{B_1 - B_1^{\mathrm{T}}}{2}\,;$$

$$C = C^{\mathrm{T}} = \frac{C_1 + C_1^{\mathrm{T}}}{2}; \qquad P = -P^{\mathrm{T}} = \frac{C_1 - C_1^{\mathrm{T}}}{2}.$$

Тепер рівняння (9.1) матиме вигляд

$$A\ddot{X} + B\dot{X} + G\dot{X} + CX + PX = F. \tag{9.3}$$

Сили CX, пропорційні координатам і з симетричною матрицею коефіцієнтів $C = [c_{ik}]$, називаються *потенціальними* або *консервативними*. Зазвичай вони є просто лінійними частинами реальних потенціальних сил тяжіння, пружності тощо (нелінійні частини потенціальних сил входять до матриці F). Квадратичну форму

$$\Pi = \frac{1}{2} X^{\mathrm{T}} C X$$

назвемо *потенціальною енергією* системи. Насправді вона є здебільшого лише частиною реальної потенціальної енергії.

Складемо за допомогою симетричної матриці $B = [b_{ik}]$ квадратичну форму

$$\Phi = \frac{1}{2} \dot{X}^{\mathrm{T}} B \dot{X}.$$

Якщо ця функція є невід’ємною, то її називають *функцією розсіювання енергії* або *дисипативною функцією Релея*, а відповідні сили $B\dot{X}$ – *дисипативними силами*. Якщо квадратична форма Φ є не просто додатною, а певнододатною, то *дисипація* називається *повною*, у противному разі – *неповною*. Якщо ж функція Φ може набувати від’ємних значень, то серед сил, що входять до матриці $B\dot{X}$, є *прискорювальні сили*. Зазвичай дисипативні сили виникають природним шляхом підчас руху тіл у середовищі, яке чинить опір, в електричних колах – за наявності омічного опору тощо. Прискорювальні сили утворюються за допомогою спеціальних пристроїв.

Сили $G\dot{X}$, які лінійно залежать від швидкостей і коефіцієнти при яких утворюють кососиметричну матрицю $G = [g_{ik}]$, називають *гіроскопічними силами*. Найчастіше ці сили зустрічаються у системах, що містять гіроскопи, але можуть утворюватися і в системах без гіроскопів.

Сили PX, які лінійно залежать від координат і коефіцієнти при яких утворюють кососиметричну матрицю $P = [p_{ik}]$, не мають точно встановленої назви. У літературі їх називають *циркуляційними*, *неконсервативними*, силами *радіальної корекції*, *псевдогіроскопічними*. Називатимемо їх неконсервативними, пам’ятаючи, що термін цей не зовсім точний, бо всі сили, окрім потенціальних, не є консервативними.

Приклад 1. Розглянемо гіроскоп у кардановому підвісі, зображений на рис. 9.1.

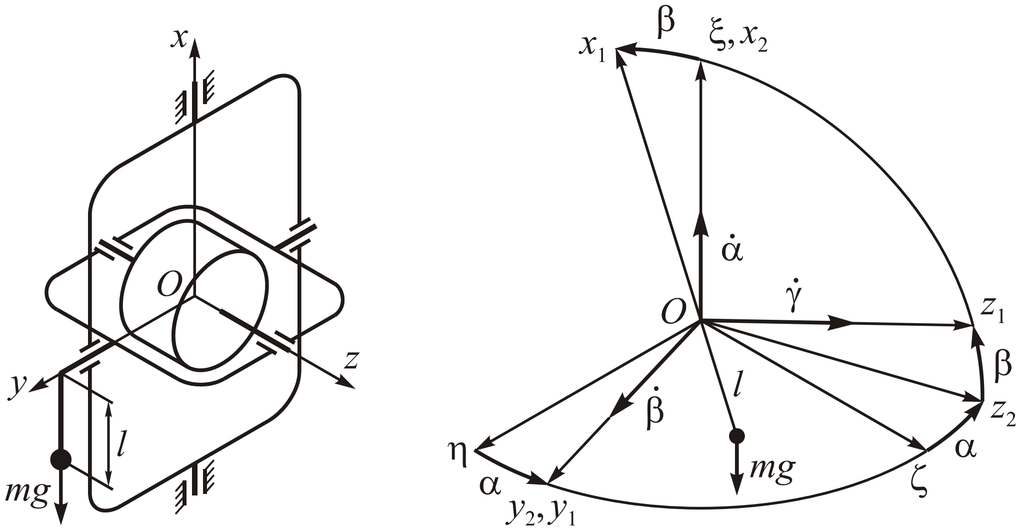

Рис. 9.1. ГКП зі зміщеним центром ваги

Припустимо:

1) моменти сил, що діють на ротор гіроскопа навколо головної осі зрівноважені:

$$R \equiv 0;$$

2) уздовж зовнішньої і внутрішньої осей карданового підвісу діють моменти сил в'язкого тертя

$$N_1 = -f_2\dot{\alpha}; \qquad L_1 = -f_1\dot{\beta};$$

3) уздовж зовнішньої осі підвісу діє момент сил міжрамкової корекції, пропорційний куту відхилення внутрішньої рамки (для цього, очевидно, цей кут має вимірюватися датчиком кута, а електричний сигнал з цього датчика – подаватися до входу датчика моментів на зовнішній осі підвісу, який й утворює момент сил):

$$N_2 = k\beta;$$

4) центр мас гіроскопа зміщений вздовж осі, перпендикулярній як внутрішній осі підвісу, так і головній осі гіроскопа; у результаті відносно внутрішньої осі підвісу утворюється момент сил тяжіння

$$L_2 = -mgl\sin\beta;$$

5) кути α і β є малими

$$x = \alpha; \qquad y = \beta.$$

Лінеаризуємо рівняння за заданих умов:

$$\begin{cases}(J_1 + J_2)\ddot{x} + f_2\dot{x} + H_0\dot{y} - ky = F_1(y,\dot{x},\dot{y}) \\ J_3\ddot{y} + f_1\cdot\dot{y} - H_0\dot{x} + mgl\cdot y = F_2(y,\dot{x},\dot{y})\end{cases}.$$

Тут $F_1(y,\dot{x},\dot{y})$ та $F_2(y,\dot{x},\dot{y})$ – нелінійні сили.

Подамо цю систему диференціальних рівнянь у матричній формі:

$$A\ddot{X} + B_1\dot{X} + C_1X = F(X),$$

де A – симетрична матриця коефіцієнтів інерції, $A = \begin{bmatrix} J_1 + J_2 & 0 \\ 0 & J_3 \end{bmatrix}$;

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} f_2 & H_0 \\ -H_0 & f_1 \end{bmatrix}; \qquad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ 0 & mgl \end{bmatrix}.$$

Виокремимо сили демпфірування, гіроскопічні, потенціальні і неконсервативні:

– матриця демпфірувальних сил:

$$B = \frac{1}{2}(B_1 + B_1^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & f_1 \end{bmatrix};$$

– матриця гіроскопічних сил:

$$G = \frac{1}{2}(B_1 - B_1^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} 0 & H_0 \\ -H_0 & 0 \end{bmatrix};$$

– матриця консервативних сил:

$$C = \frac{1}{2}(C_1 + C_1^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{k}{2} \\ -\dfrac{k}{2} & mgl \end{bmatrix};$$

– матриця сил радіальної корекції:

$$P = \frac{1}{2}(C_1 - C_1^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{k}{2} \\ \dfrac{k}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Функція Релея у цьому випадку має вигляд $\Phi = \frac{1}{2}(f_2\dot{x}^2 + f_1\dot{y}^2)$. Вона є певнододатною, і тому за її допомогою відображуються сили повної дисипації. **Кінець прикладу.**

Перш ніж дослідити стійкість незбуреного руху ($x_k = 0$ і $\dot{x}_k = 0$), перейдемо до нових змінних $Z = [z_1, z_2, \cdots, z_s]^{\mathrm{T}}$ згідно з формулою

$$X = \Lambda Z,$$

де Λ – деяка квадратна неособлива матриця.

Підстановка у рівняння (3.127) дає

$$A\Lambda\ddot{Z} + B\Lambda\dot{Z} + G\Lambda\dot{Z} + C\Lambda Z + P\Lambda Z = F(\Lambda Z).$$

Помножимо зліва обидві частини цього рівняння на транспоновану матрицю Λ^{T}:

$$\Lambda^{\mathrm{T}} A\Lambda\ddot{Z} + \Lambda^{\mathrm{T}} B\Lambda\dot{Z} + \Lambda^{\mathrm{T}} G\Lambda\dot{Z} + \Lambda^{\mathrm{T}} C\Lambda Z + \Lambda^{\mathrm{T}} P\Lambda Z = D, \qquad (9.4)$$

де $D = \Lambda^{\mathrm{T}} F(\Lambda Z)$ – матриця-стовпець, елементи якої містять z_k і $\dot{z}_k$ у степені, вищому за перший.

Урахуємо, що матриці A і C є симетричними і, окрім того, матриці A відповідає певнододатна квадратична форма. Тоді, як відомо з лінійної алгебри, існує така неособлива матриця Λ, яка перетворює одночасно матрицю A в одиничну, а матрицю C – в діагональну. Нехай Λ є саме такою матрицею. Тоді матимемо:

$$\Lambda^{\mathrm{T}} A \Lambda = E; \qquad \Lambda^{\mathrm{T}} C \Lambda = C_0,$$

де C_0 – діагональна, а E – одинична матриці.

Неважко показати, що матриця ($\Lambda^{\mathrm{T}} B \Lambda$) буде симетричною, а матриці ($\Lambda^{\mathrm{T}} G \Lambda$) і ($\Lambda^{\mathrm{T}} P \Lambda$) – кососиметричними. Дійсно, на підставі правила транспонування добутку матриць маємо:

$$(\Lambda^{\mathrm{T}} B \Lambda)^{\mathrm{T}} = (B\Lambda)^{\mathrm{T}} (\Lambda^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \Lambda^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} \Lambda.$$

Оскільки матриця B симетрична, то $B^{\mathrm{T}} = B$, і отже, $(\Lambda^{\mathrm{T}} B \Lambda)^{\mathrm{T}} = \Lambda^{\mathrm{T}} B \Lambda$, що і доводить симетричність матриці $\Lambda^{\mathrm{T}} B \Lambda$. Аналогічно можна довести, що матриці ($\Lambda^{\mathrm{T}} G \Lambda$) і ($\Lambda^{\mathrm{T}} P \Lambda$) є кососиметричними, спираючись на відому кососиметричність матриць G і P.

Ураховуючи це і беручи до уваги, що $E\ddot{Z} = \ddot{Z}$, рівняння (9.4) можна записати так:

$$\ddot{Z} + B\dot{Z} + G\dot{Z} + C_0 Z + PZ = D, \tag{9.5}$$

де для простоти симетрична матриця $\Lambda^{\mathrm{T}} B \Lambda$ і кососиметричні матриці $\Lambda^{\mathrm{T}} G \Lambda$ та $\Lambda^{\mathrm{T}} P \Lambda$ позначено тими самими літерами B, G і P відповідно.

Можна, проте, підібрати таку матрицю Λ, яка перетворить матрицю A в одиничну, а матрицю B – у діагональну, або, залишаючи матрицю A симетричною, перетворити одночасно матриці B і C у діагональні (у разі повної дисипації це можливо). Тоді матимемо ще дві форми рівняння (9.4)

$$\ddot{Z} + B_0\dot{Z} + G\dot{Z} + CZ + PZ = D; \tag{9.6}$$

$$A\ddot{Z} + B_0\dot{Z} + G\dot{Z} + C_0 Z + PZ = D, \tag{9.7}$$

де C_0 та B_0 – діагональні матриці з дійсними елементами:

$$C_0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_s \end{bmatrix}; \qquad B_0 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_s \end{bmatrix}.$$

Отже, за допомогою перетворення $X = \Lambda Z$ рівняння (9.3) можна звести до однієї з трьох дійсних форм (9.5), (9.6) або (9.7), причому потенціальні, дисипативні, гіроскопічні та неконсервативні сили перетворюються у сили тієї самої структури.

Очевидно, що зі стійкості (нестійкості) відносно координат z_k і швидкостей $\dot{z}_k$ випливає стійкість (нестійкість) відносно координат x_k і швидкостей $\dot{x}_k$, і навпаки.

Між початковими матрицями B та C і отриманими з них матрицями B_0 та C_0 існують співвідношення:

$$\det(B_0) = b_1 b_2 \ldots b_s = \Delta^2 \det(B);$$

$$\det(C_0) = c_1 c_2 \ldots c_s = \Delta^2 \det(C), \tag{9.8}$$

де $\Delta = \det(\Lambda)$ – визначник матриці перетворення.

Якщо прискорювальних сил немає, то серед елементів матриці B немає від'ємних, а в разі повної дисипації усі b_k додатні. Якщо ж прискорювальні сили існують, то серед елементів b_k є від'ємні. За мінімуму потенціальної енергії Π усі коефіцієнти c_i додатні, а за максимуму Π серед них є від'ємні.

Припустимо, що на систему діють лише потенціальні сили CX, і не діють інші сили ($B = G = P = F = 0$). Тоді, користуючись формою (9.5), рівняння збуреного руху можна подати у такому вигляді:

$$\ddot{Z} + C_0 Z = 0.$$

Це матричне рівняння є еквівалентним s скалярним рівнянням

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + c_1 z_1 = 0; \\ \dots \\ \ddot{z}_s + c_s z_s = 0. \end{cases} \tag{9.9}$$

Координати z_i, рівняння збуреного руху за яких мають вигляд рівнянь (3.69), називають *нормальними координатами*.

Рівняння (9.9) не зв'язані одне з одним і інтегруються незалежно одне від одного. Маємо:

1) якщо $c_k > 0$, то розв'язок має вигляд

$$z_k = A_k \sin(\mu_k t + \varepsilon_k); \qquad (\mu_k = \sqrt{c_k});$$

2) якщо $c_k < 0$,то

$$z_k = A_k e^{\nu_k t} + B_k e^{-\nu_k t}; \qquad (\nu_k = \sqrt{-c_k}).$$

З рівнянь (9.9) видно, що якщо всі числа c_k додатні, то незбурений рух $z_k = 0$, $\dot{z}_k = 0$ є стійким з нормальних координат z_k і швидкостей $\dot{z}_k$ (а отже, й відносно x_i і $\dot{x}_i$). Кожному від'ємному числу c_k відповідає нестійка координата z_k, і отже, незбурений рух за наявності $c_k < 0$ буде нестійким (причому за будь-яких нелінійних сил D). У зв'язку з цим числа c_k називаються *коефіцієнтами стійкості системи*, а кількість від'ємних c_k – *ступенем нестійкості*.

Значущими є не кількість від'ємних c_k, а її парність. Очевидно, відповідно до другої рівності (9.8) можна визначити парність ступеня нестійкості системи не вдаючись безпосередньо до переходу до нормальних координат. *Якщо визначник C потенціальних сил первинних рівнянь збуреного руху додатний, то ступінь нестійкості системи є парним, якщо ж* $\det C < 0$*, – то непарним.*

Приклад 2. Розглянемо ГКП зі зміщеним центром мас і радіальною корекцією (див. приклад 1).

Матриця потенціальних сил для цього випадку має вигляд:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{k}{2} \\ -\dfrac{k}{2} & mgl \end{bmatrix}.$$

Її визначник $\det C = -k^2/4$ – від'ємний, що означає, що ГКП з міжрамковою корекцією:

1) є нестійким (якщо відсутні як гіроскопічні, так і дисипативні, неконсервативні і нелінійні сили);

2) ступінь його нестійкості є непарним. **Кінець прикладу.**

Вплив дисипативних і гіроскопічних сил на стійкість руху потенціальної системи. Далі без доведення наведемо теореми, які стосуються стійкості систем. .

Перша теорема Томсона і Тета. *Якщо нестійкість незбуреного руху потенціальної системи має непарний ступінь, то стабілізувати рух не можна ніякими гіроскопічними силами.*

Примітки.

1. Теорема залишається вірною і за врахування нелінійних сил, оскільки нестійкість системи не залежить від членів, які містять z_k і $\dot{z}_k$ у степені, вищому за перший (тобто від нелінійних сил, див. другу теорему Ляпунова).

2. Якщо ступінь нестійкості парний, то введенням гіроскопічних сил можна зробити систему стійкою, якщо ці сили досить великі.

Друга теорема Томсона і Тета. *Якщо незбурений рух* $Z = 0$, $\dot{Z} = 0$ *потенціальної системи є стійким, то з додаванням довільних гіроскопічних та дисипативних сил (останні не обов'язково повної дисипації) стійкість руху зберігається.*

Третя теорема Томсона і Тета. *Якщо незбурений рух* $Z = 0$, $\dot{Z} = 0$ *є стійким за наявності тільки потенціальних сил, то він стає асимптотично стійким з додаванням довільних гіроскопічних та дисипативних сил, якщо останні є силами повної дисипації.*

Четверта теорема Томсона і Тета. *Незбурений рух* $Z = 0$, $\dot{Z} = 0$*, нестійкий під дією потенціальних сил, залишається нестійким у разі додавання довільних гіроскопічних та дисипативних сил, якщо останні є силами повної дисипації.*

З останньої теореми випливає, що якщо нестійку потенціальну систему стабілізувати гіроскопічними силами, то навіть малі дисипативні сили з повною дисипацією (вони завжди існують) з часом зруйнують досягнуту стійкість. У зв'язку з цим стійкість, яку забезпечено за рахунок лише потенціальних сил, Томсон і Тет запропонували називати *віковою стійкістю*, а стійкість, досягнуту гіроскопічною стабілізацією – *тимчасовою стійкістю*.

Примітка. Якщо, крім дисипативних сил діють прискорювальні сили (функція Релея може сягати від'ємних значень), то гіроскопічна стабілізація нестійкої потенційної системи є можливою.

Приклад 1. ***Стійкість дзиґи.*** Визначаючи положення осі власного обертання дзиґи у просторі кутами осциляції , можна описати її рух в малому околі вертикалі рівняннями

$$\begin{cases} J'_e\ddot{\delta}_1 + H_0\dot{\delta}_2 - mgl\,\delta_1 = 0 \\ J'_e\ddot{\delta}_2 - H_0\dot{\delta}_1 - mgl\,\delta_2 = 0 \end{cases}. \qquad (9.10)$$

Ці рівняння можна розглядати як результат накладання на нестійку потенціальну систему

$$\begin{cases} J'_e\ddot{\delta}_1 - mgl\,\delta_1 = 0 \\ J'_e\ddot{\delta}_2 - mgl\,\delta_2 = 0 \end{cases}.$$

гіроскопічних сил $H_0\dot{\delta}_2$ і $-H_0\dot{\delta}_1$ відповідно.

Запишемо рівняння (9.10) у вигляді:

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_1 + h\dot{\delta}_2 - c\,\delta_1 = 0 \\ \ddot{\delta}_2 - h\dot{\delta}_1 - c\,\delta_2 = 0 \end{cases},$$

де

$$h = \frac{H_0}{J'_e}; \qquad c = \frac{mgl}{J'_e}. \tag{9.11}$$

Шукатимемо розв'язок рівняння у звичайній формі

$$\delta_1 = Ae^{\lambda t}; \qquad \delta_2 = Be^{\lambda t}$$

і складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - c & g\lambda \\ -g\lambda & \lambda^2 - c \end{vmatrix} = \lambda^4 + (h^2 - 2c)\lambda^2 + c^2 = 0.$$

Для того, щоб корені цього рівняння мали від'ємні дійсні частини, необхідно й достатньо, щоб коефіцієнти характеристичного рівняння задовольняли такі умови:

$$c^2 > 0; \qquad h^2 - 2c > 0; \qquad \left(h^2 - 2c\right)^2 - 4c^2 > 0.$$

Ці три нерівності легко зводяться до однієї умови (пригадаємо, що згідно з припущенням $c > 0$):

$$|h| > 2\sqrt{c}.$$

З врахуванням (9.11) умова гіроскопічної стабілізації набуває вигляду

$$|H_0| > 2\sqrt{J'_e mgl}.$$

Цю умову було отримано раніше у нелінійній постановці задачі.

Якщо центр ваги C нижчий за точку опори O (випадок гіроскопічного маятника), то обидві координати δ_1 і δ_2 будуть стійкими. Згідно з другою теоремою Томсона і Тета у цьому випадку стійкість досягатиметься при будь-якій швидкості власного обертання дзиґи. На підставі четвертої теореми Томсона і Тета стійкість дзиґи є тимчасовою, а стійкість гіромаятника – віковою.

Приклад 2. ***Гіроскопічний однорейковий вагон***. У першій чверті XX ст. з'явилися дослідні зразки однорейкового вагона і двоколісного автомобіля, центр ваги яких був вищим за рейку (дорогу). Схему одного з них – вагона Шиловського – зображено на рис. 9.2.

Вертикальне положення самого вагона (автомобіля) нестійке, і для його стабілізації використовувався гіроскоп з вертикальною віссю власного обертання, вісь обертання кожуха гіродвигуна якого закріплювалася на корпусі вагона.

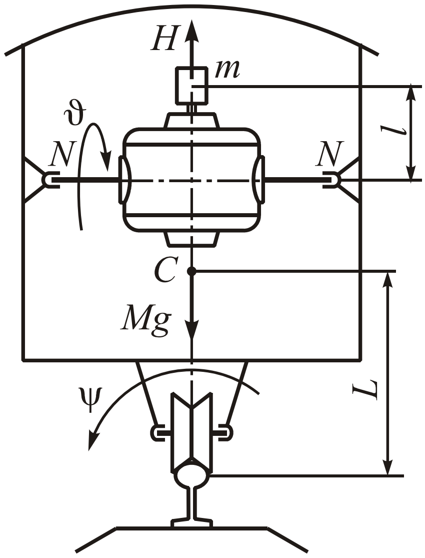

Рис. 9.2. Однорейковий вагон Шиловського

Центр ваги C вагона міститься вище за рейку, тому кут, який визначає відхилення вагона від вертикалі, є нестійкою координатою. Згідно з першою теоремою Томсона і Тета гіроскопічної стабілізації можна досягти лише при парній кількості нестійких координат. З цього випливає, що друга координата системи ϑ (кут повороту гіроскопа відносно вагона (вісь NN) має бути також нестійкою. Для цього до верхньої частини гіроскопа прикріплювався вантаж масою m (рис. 9.2), який утворював перекидальний момент сил тяжіння відносно осі NN. В результаті система набувала двох нестійких координат ψ і ϑ. Урахуємо тепер сили опору, які виникають при хитанні вагону і рамки з гіроскопом (ці сили виникають за рахунок опору середовища і тертя в опорах). Згідно з четвертою теоремою Томсона і Тета ці сили руйнують гіроскопічну стабілізацію (бо без гіроскопа система є нестійкою). Тому для стабілізації потрібно ввести сили іншої природи. Для цього на осі обертання NN встановлювали спеціальний електромагнітний пристрій (на рисунку не показаний), який утворював прискорювальний момент $k_2\dot{\vartheta}$, що діяв навколо осі NN («від'ємне» тертя).

З'ясувавши за допомогою теорем Томсона і Тета характер сил, які мають забезпечити стійкість однорейкового гіроскопічного вагона, перейдемо до кількісного аналізу. Для цього скористаємося диференціальними рівняннями збуреного руху у формі:

$$\begin{cases} A_1\ddot{\psi} + k_1\dot{\psi} - H\dot{\vartheta} - c_1\psi = Q_\psi \\ A_2\ddot{\vartheta} - k_2\dot{\vartheta} + H\dot{\psi} - c_2\vartheta = Q_\vartheta \end{cases}. \qquad (9.12)$$

де A_1 – момент інерції усієї системи (вагон і гіроскоп) відносно осі рейки; A_2 – момент інерції гіроскопа разом з його рамкою відносно осі NN; H – власний кінетичний момент гіроскопа; k_1 – коефіцієнт в'язкого тертя системи навколо осі рейки; $c_1 = MgL$ – опорний маятниковий момент системи відносно осі рейки; M –маса всієї системи (вагон і гіроскоп); L – відстань між центром мас всієї системи і віссю рейки; $c_2 = mgl$ – опорний маятниковий момент гіроскопа з його рамкою відносно осі NN; m – маса гіроскопа з рамкою; l – відстань між центром мас гіроскопа з рамкою і віссю NN; Q_ψ та Q_ϑ – нелінійні члени.

Рівняння (9.12) можна розглядати як результат накладання на нестійку потенціальну систему

$$\begin{cases} A_1\ddot{\psi} - c_1\psi = 0 \\ A_2\ddot{\vartheta} - c_2\vartheta = 0 \end{cases}$$

гіроскопічних сил $-H\dot{\vartheta}$ та $H\dot{\psi}$, дисипативної сили $k_1\dot{\psi}$, прискорювальної сили $-k_2\dot{\vartheta}$ і нелінійних сил Q_ψ та Q_ϑ відповідно.

Складемо характеристичне рівняння згідно з рівняннями першого наближення (останні виходять з рівнянь (3.72) відкиданням нелінійних членів):

$$\begin{vmatrix} A_1p^2 + k_1p - c_1 & -Hp \\ Hp & A_2p^2 - k_2p - c_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкриваючи його і групуючи члени, дістаємо:

$$a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 = 0, \tag{9.13}$$

де

$$a_0 = A_1A_2; \qquad a_1 = k_1A_2 - k_2A_1; \qquad a_2 = H^2 - c_1A_2 - c_2A_1 - k_1k_2;$$
$$a_3 = c_1k_2 - c_2k_1; \qquad a_4 = c_1c_2. \tag{9.14}$$

Критерій Гурвіца для системи четвертого порядку (3.73) зводиться до нерівностей ($a_0 > 0$):

$$a_1 > 0; \qquad a_2 > 0; \qquad a_3 > 0; \qquad a_4 > 0; \Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 > 0.$$

У розглядуваному випадку умови $a_0 > 0$ і $a_4 > 0$ виконуються «автоматично». З першої і третьої умов випливають межі для величини «крутості» k_2 характеристики пристрою, який утворює прискорювальний момент:

$$\frac{c_2}{c_1}k_1 < k_2 < \frac{A_2}{A_1}k_1; \tag{9.15}$$

$$H^2 > c_1A_2 + c_2A_1 + k_1k_2 + \frac{A_2A_1(c_1k_2 - c_2k_1)^2 + c_1c_2(k_1A_2 - k_2A_1)^2}{(c_1k_2 - c_2k_1)(k_1A_2 - k_2A_1)}.$$

Друга умова визначає нижню межу величини кінетичного моменту гіроскопа. Вона випливає з останньої умови ($\Delta_3 > 0$).

Оскільки в разі виконання умови (3.75) усі корені характеристичного рівняння (згідно з критерієм Гурвіца) матимуть від’ємні дійсні частини, то на підставі теореми Ляпунова про стійкість руху згідно з першим наближенням рух однорейкового вагону Шиловського навколо вертикалі є асимптотично стійким незалежно від членів вищого порядку (Q_ψ і Q_ϑ). Із формул (3.74) видно, що при $k_2 < 0$ (замість прискорювального моменту сил діє звичайний момент сил тертя) коефіцієнт a_3 буде від’ємним, і система відповідно до четвертої теореми Томсона і Тета стане нестійкою.

Стійкість руху під дією лише гіроскопічних і дисипативних сил. Досі розглядалися системи, в яких дисипативні та гіроскопічні сили діяли разом з потенціальними. Така ситуація характерна, зокрема, для *позиційних* гіроскопічних приладів (на які діють моменти сил тяжіння через незбіжність центра мас і точки підвісу, а також моменти пружних сил). Тим часом, часто у практиці трапляються такі системи (так звані «астатичні»), в яких немає потенціальних сил.

Розглянемо спочатку випадок, коли на систему діють лише гіроскопічні сили, вважаючи, що рівняння збуреного руху доведено до форми:

$$\ddot{Z} + G\dot{Z} = 0. \tag{9.16}$$

Теорема 1. *Незбурений рух $Z = 0$, $\dot{Z} = 0$ системи, на яку діють лише гіроскопічні сили, завжди є стійким зі швидкостей.*

Примітка. Теорема є слушною і для лінійної неавтономної системи (коли матриця G явно залежить від часу) і для нелінійної системи.

Теорема 2. *Для того щоб незбурений рух лінійної неавтономної системи, на яку діють лише гіроскопічні сили, був стійким й відносно координат, необхідно й достатньо, щоб визначник матриці гіроскопічних сил не дорівнював нулю.*

Наслідок. Якщо на систему діють лише гіроскопічні сили і вона має непарну кількість визначальних координат, то незбурений рух такої системи завжди є нестійким (якщо s – непарне число, то $\det G$ тотожно дорівнює нулю).

Примітка 1. Оскільки незбурений рух стійкий з швидкостей за будь-якого значення $\det G$, то з доказу нестійкості системи випливає, що при $\det G = 0$ система втрачає стійкість лише з координат.

Примітка 2. Якщо (9.16) є рівнянням першого наближення нелінійної системи, на яку діють лише гіроскопічні сили, то з умови $\det G \neq 0$ не випливає стійкість початкової нелінійної системи.

Теорема 3. *Якщо на систему окрім гіроскопічних сил діють сили повної дисипації, то незбурений рух є асимптотично стійким відносно швидкостей і просто стійким відносно координат.*

Вплив на стійкість руху неконсервативних сил

Теорема 1. *Незбурений рух $Z = 0$, $\dot{Z} = 0$ системи, на яку діють лише неконсервативні сили ($\ddot{Z} + PZ = 0$), завжди є нестійким незалежно від членів вищого порядку.*

За наявності ще й потенціальних сил ($\ddot{Z} + PZ + CZ = 0$) є слушними такі теореми.

Теорема 2. *При відсутності нелінійних членів ($F = 0$) асимптотична стійкість не може бути досягнута без дисипативних сил.*

Теорема 3. *Якщо визначник матриці з коефіцієнтів за сил, пропорційних визначальним координатам, є від'ємним* ($\det(P + C) < 0$), *то система є нестійкою за будь-яких гіроскопічних, дисипативних, прискорювальних і неконсервативних сил.*

Теорема 4. *Якщо система не має консервативних сил* ($C = 0$) *і відсутні нелінійні члени* ($F = 0$), *то*:

1) у разі непарної кількості визначальних координат асимптотична стійкість не може бути досягнута ні за яких гіроскопічних, дисипативних, прискорювальних і неконсервативних сил;

2) у разі парної кількості визначальних координат для забезпечення асимптотичної стійкості необхідно, окрім дисипативних сил, додати гіроскопічні сили.

Теорема 5. *Якщо потенціальна енергія збуреного руху має максимум*, *то*:

1) у разі непарної кількості визначальних координат і будь-яких нелінійних сил систему не можна стабілізувати ніякими гіроскопічними, дисипативними, прискорювальними і неконсервативними силами;

2) у разі парної кількості визначальних координат і за умови, що на систему діють сили повної дисипації, для стабілізації системи необхідно додати одночасно гіроскопічні та неконсервативні сили (незалежно від нелінійних членів).

Контрольні запитання

1. Що в теорії Томсона-Тета розуміють під силами? силами інерції? нелінійними силами? кінетичною енергією? потенціальними силами? потенціальною енергією? гіроскопічними силами? дисипативними силами? Циркуляційними силами?
2. Що таке функція Релея?
3. Що розуміють під нормальними координатами?
4. Що таке ступінь нестійкості системи?
5. Що називають тимчасовою стійкістю? віковою стійкістю*

Абетковий покажчик