УДК 531.383

Ю. Ф. Лазарєв

Застосування кватерніонів в механіці матеріальної точки

Вступ.

Сучасне подання механіки матеріальної точки з врахуванням релятивістського підходу базується на математичному апараті, розробленому А. Ейнштейном [1] і Г. Мінковським [2…7]. Останнім часом поновлюються спроби [8, 9] переглянути основи релятивістської механіки з метою усунення недоречностей, що виникають при аналізі класичних перетворень Фойгта-Лоренца. У статті пропонується для опису 4-векторів у просторі-часу використовувати математичний апарат кватерніонів. Це дозволяє позбутися гіпотези псевдоевклідовості простору-часу, яка використовується у просторі Мінковського.

Постановка задачі

Відомий підхід [1…7], започаткований А. Ейнштейном, вбачає розв‘язок задачі незмінності швидкості світла в системах відліку, що рухаються відносно одна одної, у перетворенні просторово-часових координат в цих системах відліку такого виду:

$$x' = x; \qquad y' = y; \qquad z' = \frac{z - v_O t}{\gamma}; \qquad t' = \frac{t - v_O z / c^2}{\gamma}; \qquad \left(\gamma = \sqrt{1 - \frac{v_O^2}{c^2}}\right). \tag{1}$$

Тут припущено, що система відліку $X'Y'Z' - t'$ ("переносна") рухається відносно інерціальної ("абсолютної") системи $XYZ - t$ вдовж осі Z зі швидкістю v_o. При цьому x, y, z, t є координатами деякої певної матеріальної точки в системі $XYZ - t$, а x', y', z', t' - її координатами в переносній системі $X'Y'Z' - t'$. При цьому t є власним часом системи відліку $XYZ - t$, який відраховується по годинниках, нерухомих у системі XYZ, а t' трактується як власний час переносної системи, який відраховується годинниками, нерухомими у цій системі координат.

Співвідношення (1) приводять до виконання наступної рівності:

$$c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2). \tag{2}$$

Вона зазвичай інтерпретується [2, с. 389] як незалежність величини просторово-часового інтервалу матеріальної точки від обрання системи відліку. Але така інтерпретація не може бути визнана задовільною. Мова про те, що *величина* t' *не може бути визнана як власний час системи відліку* $X'Y'Z' - t'$ через те, що згідно (1) вона залежить не лише від характеристик самої системи відліку, а ще й від характеристик руху матеріальної точки, рух якої описується. А якщо t' не є власним часом переносної системи, то співвідношення (2) не описує рівності інтервалів однієї точки у цих системах відліку, а дещо зовсім інше, фізичний зміст чого важко зрозуміти.

Диференціальна форма перетворень має такий вигляд:

$$dx' = dx; \qquad dy' = dy; \qquad dz' = \frac{dz - v_O dt}{\gamma}; \qquad dt' = \frac{dt - \frac{v_O}{c^2} dz}{\gamma}.$$

Звідси випливають зворотні перетворення

$$dx = dx'; \qquad dy = dy'; \qquad dz = \frac{dz' + v_O dt'}{\gamma}; \qquad dt = \frac{dt' + \frac{v_O}{c^2} dz'}{\gamma} \tag{3}$$

і диференціальний аналог співвідношення (2):

$$c^2 (dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 = c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \tag{4}$$

Вираз справа є дійсно поданням у диференціальній формі інтервалу точки в абсолютній системі. Але ліву частину рівності не можна ідентифікувати як якійсь інтервал, навіть якщо вважати координати x', y', z' відносними координатами точки, з огляду на невизначеність поняття часу t'. Вводячи швидкості точки в абсолютній системі відліку, а також складові відносної швидкості точки

$$v_X = \frac{dx}{dt}; \qquad v_Y = \frac{dy}{dt}; \qquad v_Z = \frac{dz}{dt}, \qquad v'_X = \frac{dx'}{dt'}; \qquad v'_Y = \frac{dy'}{dt'}; \qquad v'_Z = \frac{dz'}{dt'},$$

можна подати перетворення (3) через перетворення швидкостей у такий спосіб:

$$v'_X = \frac{\gamma \cdot v_X}{1 - \frac{v_O \cdot v_Z}{c^2}}; \qquad v'_Y = \frac{\gamma \cdot v_Y}{1 - \frac{v_O \cdot v_Z}{c^2}}; \qquad v'_Z = \frac{v_Z - v_O}{1 - \frac{v_O \cdot v_Z}{c^2}}; \qquad \frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{v_O \cdot v_Z}{c^2}}{\gamma}.$$

Тоді перехід від системи $X'Y'Z' - t'$ до системи $XYZ - t$ описуватиметься співвідношеннями:

$$v_X = \frac{\gamma \cdot v'_X}{1 + \frac{v_O \cdot v'_Z}{c^2}}; \qquad v_Y = \frac{\gamma \cdot v'_Y}{1 + \frac{v_O \cdot v'_Z}{c^2}}; \qquad v_Z = \frac{v'_Z + v_O}{1 + \frac{v_O \cdot v'_Z}{c^2}}; \qquad \frac{dt}{dt'} = \frac{1 + \frac{v_O \cdot v'_Z}{c^2}}{\gamma}. \tag{5}$$

Зауважимо, що згідно цих формул точка, що рухається відносно переносної системи зі швидкістю світла вдовж, наприклад, осі X', матиме такі складові швидкості в абсолютній системі:

$$v_X = \gamma \cdot c; \qquad v_Y = 0; \qquad v_Z = v_O.$$

Тобто у нерухомій системі рух цієї точки уявляється таким, що здійснюється зі швидкістю світла по прямій, яка нахилена у напрямку швидкості v_O до площини, перпендикулярної вектору переносної швидкості, на кут ϑ

$$\sin\vartheta = \frac{v_O}{c} = \beta; \qquad \cos\vartheta = \gamma. \tag{6}$$

Подібні траєкторії матимуть усі точки, що відлітають від початку переносної системи у площині $X'Y'$ зі швидкістю світла. У цілому вони утворюють у нерухомій системі конічну поверхню з віссю симетрії, що збігається з віссю Z і кутом розхилу ($\pi/2 - \vartheta$). Усі промені, які в переносній системі заповнюють півпростір з боку додатної півосі осі Z', у нерухомій системі містяться усередині вказаного конусу. Решта променів, які у переносній системі заповнюють півпростір з боку від‘ємної півосі Z', у нерухомій системі заповнюють увесь простір зовні конуса. Отже, *якщо джерело світла віддаляється від спостерігача, інтенсивність його випромінювання у напрямку спостерігача має зменшуватися, а при русі джерела у напрямку спостерігача, навпаки, збільшуватися*. Якщо фотон рухається уздовж осі, нахиленої під кутом φ до осі Z', то

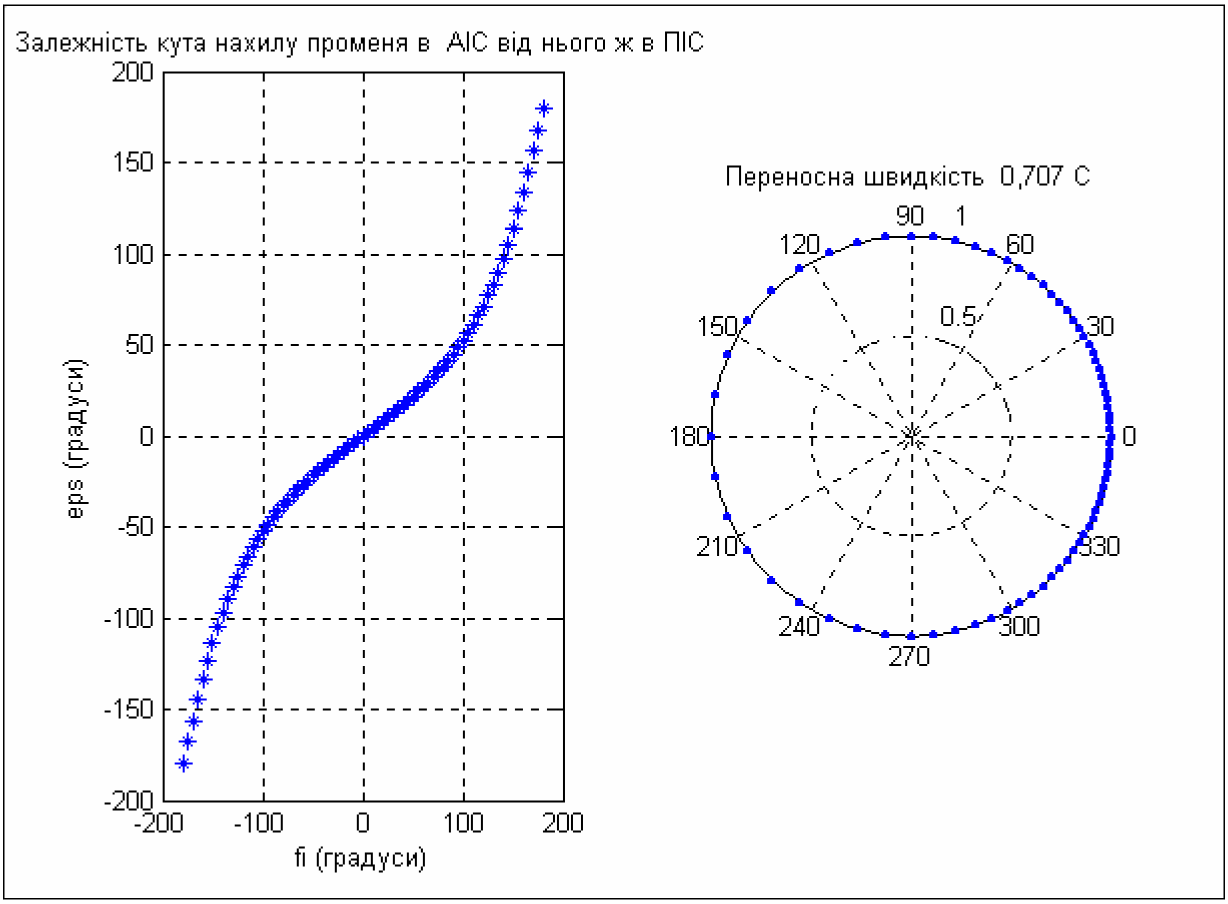
$$x = \frac{\cos\vartheta \sin\varphi}{1 + \cos\varphi \sin\vartheta} ct; \qquad y = 0; \qquad z = \frac{\cos\varphi + \sin\vartheta}{1 + \cos\varphi \sin\vartheta} ct.$$

Кут ε нахилу траєкторії до осі Z в абсолютній систем визначиться із співвідношення $tg\varepsilon = \frac{x}{z} = \frac{\sin\varphi \cdot \cos\vartheta}{\cos\varphi + \sin\vartheta}$.

Наприклад, для $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ (що відповідає швидкості полюсу $v_0 = 0{,}707c$), одержимо $tg\varepsilon = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}\cos\varphi + 1}$.

Нижче наведений графік залежності $\varepsilon(\varphi)$ та подання розподілу в абсолютному просторі (АІС) променів, які рівномірно розподілені в переносній інерціальній системі (ПІС). З рисунку стає наочним попередній висновок: інтенсивність випромінювання у напрямку переносної швидкості є значно більшою за його інтенсивність у зворотному напрямку.

Слід наголосити, що перетворення Лоренца основані не безпосередньо на основному постулаті спеціальної теорії відносності про незмінність швидкості світла в усіх інерціальних системах відліку, а на використанні значно більш обмежуючого припущення про незмінність так званого інтервалу точки у різних інерціальних системах. Це припущення не є достатньо обґрунтованим і, як вже вказувалося, не є фізично прозорим. Далі показано, що виконання основного постулату теорії відносності можна забезпечити, виходячи з більш наочного постулату про рівність швидкості світла модуля кватерніону швидкості точки у різних системах відліку.



Розподіл променів джерела світла

Кінематика матеріальної точки

Введемо деякі загальні визначення.

Визначення 1. *Положення матеріальної точки у деякій системі відліку визначається кватерніоном чотиривимірного простору "простір-час"*

$$\mathbf{R} = c\cdot\tau + \mathbf{i}\cdot x + \mathbf{j}\cdot y + \mathbf{k}\cdot z\,. \qquad (7)$$

Тут позначено: c - швидкість світла, x, y, z - координати радіуса-вектора в системі координат, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - орти цієї системи координат (а також уявні одиниці уявного тривимірного простору), τ - так званий "власний" час матеріальної точки.

При такому поданні вісь часу є скалярною віссю, яка характеризує положення точки у власному часі, а положення матеріальної точки у просторі визначається її просторовими координатами в системі координат XYZ. У кватерніонному відношенні реальний тривимірний простір складає уявну тривимірну гіперплощину, ортогональну до скалярної осі часу.

Зручніше подавати кватерніон (7) у вигляді:

$$\mathbf{R} = c\cdot\tau + \mathbf{r}\,, \qquad (8)$$

де $c\cdot\tau$ - скалярна частина радіус-кватерніона, яка характеризує положення точки у власному часі, а $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cdot x + \mathbf{j}\cdot y + \mathbf{k}\cdot z$ - векторна частина кватерніону, яка визначає положення точки в уявному тривимірному підпросторі, яку одночасно можна вважати звичайним радіус-вектором у звичайному просторі.

Визначення 2. *Швидкістю матеріальної точки називається кватерніон, що дорівнює похідній від кватерніону положення точки за власним часом системи відліку:*

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}\,. \qquad (9)$$

Тут t - власний час системи відліку, в якій визначено положення точки. Він відлічується по годинниках, нерухомих у цій системі координат. З врахуванням виразу (8) для кватерніону положення, одержимо

$$\mathbf{V} = c\frac{d\tau}{dt} + \mathbf{v}\,, \tag{10}$$

де скалярну частину $c\frac{d\tau}{dt}$ можна інтерпретувати як швидкість змінювання положення точки у часі, а вектор

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}\cdot v_X + \mathbf{j}\cdot v_Y + \mathbf{k}\cdot v_Z$$

- як звичайний вектор швидкості точки в обраній системі відліку (v_X, v_Y, v_Z - проекції цього вектора на осі цієї системи):

$$v_X = \frac{dx}{dt}\,; \qquad v_Y = \frac{dy}{dt}\,; \qquad v_Z = \frac{dz}{dt}\,.$$

Позначимо

$$\frac{d\tau}{dt} = \gamma\,; \qquad \beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2}\,. \tag{11}$$

Тоді можна записати

$$\mathbf{V} = c\gamma + \mathbf{v}\,. \tag{12}$$

Постулат 1. *Норма кватерніону швидкості матеріальної точки при будь-якому її русі і в будь якій інерціальній системі відліку є сталою величиною і дорівнює квадрату швидкості світла:*

$$\|\mathbf{V}\| = c^2\gamma^2 + v^2 = c^2\,. \tag{13}$$

Підставивши сюди співвідношення (11), одержимо: $\gamma^2 + \beta^2 = 1$, звідкіля випливає

$$\gamma = \sqrt{1-\beta^2}\,.$$

Величину γ можна інтерпретування як "швидкість змінювання власного часу точки" по відношенню до власного часу тієї системи відліку, в якій визначається її положення, а β - як безрозмірну швидкість точки у цій самій системі відліку. Тому можна зробити наступні висновки.

Висновок 1. *Сума квадратів швидкості власного часу точки і її безрозмірної швидкості завжди дорівнює одиниці.*

Висновок 2. *"Власний" час матеріальної точки пов'язаний з її безрозмірною швидкістю співвідношенням:*

$$\tau = \int \sqrt{1-\beta^2}\,dt\,.$$

Висновок 3. *Швидкість у часі матеріальної точки є максимальною і дорівнює швидкості світла у випадку, коли точка є нерухомою. При наближенні швидкості точки до світлової, її швидкість у часі зменшується, сягаючи нуля при швидкості точки, рівної швидкості світла.*

Висновок 4. *Постулат 1 дозволяє визначити "власний" час точки за швидкістю її переміщення у просторі.*

Деякі загальні міркування.

Величину τ, що входить у вираз (7) і яку було названо "власним" часом точки, не можна визнати за дійсний власний час точки, тобто такий, що відлічується за годинниками, нерухомими відносно цієї точки. Дійсно, нехай τ - справді власний час точки. Якщо точка рухається з постійною швидкістю v, ця величина визначиться через швидкість точки з співвідношення:

$$\frac{d\tau}{dt} = \gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Тепер перейдемо у систему координат з початком у розглядуваній точці і з координатними осями, паралельними осям системи XYZ. Ця нова система координат за прийнятих умов також інерціальною, повністю рівноправною вихідній ("абсолютній") системі. Визначаючи тепер положення початку S абсолютної системи координат у новій системі відліку одержимо $\mathbf{R}_S = c\cdot t_1 - \mathbf{i}\cdot x_O - \mathbf{j}\cdot y_O - \mathbf{k}\cdot z_O$. При цьому "власний" час t_1 точки S визначається аналогічним чином:

$$\frac{dt_1}{d\tau} = \gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \; .$$

Чи збігається "власний" час t_1 початку вихідної системи з її власним часом t ? Вочевидь – ні, бо:

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{dt_1}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \gamma^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \neq 1 \, .$$

Тому слід зробити висновок, що визначений таким чином "власний" час t_1 не може бути прийнятим за дійсний власний час t , який відлічується по годинниках, нерухомих відносно "абсолютної" системи. Отже, поняття власного часу точки є позірним, яке корисне задля встановлення співвідношень при складанні швидкостей або переміщень, але суто відносним, залежним від системи відліку, в якій розглядається рух точки. "Власний" час тієї самої точки у різних системах відліку може бути різним. Він ніяк не пов‘язаний з дійсним власним часом точки, який відлічується за годинниками, нерухомими відносно цієї точки і завжди тече повільніше (або – при нерухомості - однаково) часу системи відліку, в який він розглядається. Тому у подальшому називатимемо "власний" час точки в обраній системі відліку *псевдочасом* точки.

Висновок 5. *Псевдочас точки є поняттям відносним, не пов‘язаним з часом, що відлічується за годинниками, нерухомими відносно цієї точки.*

Постулат 2. *В усіх системах відліку їхній власний час є єдиним і не змінюється у залежності від швидкості руху початку системи координат..*

Кінематика відносного руху точки

Введемо у розгляд дві системи відліку: 1) основну (вихідну) інерціальну (абсолютну) $XYZ - t$; 2) переносну $X_O Y_O Z_O - t$, початок якої міститиметься у полюсі О. Координатні осі цих двох систем будемо вважати паралельними. У подальшому називатимемо системи координат, координатні осі якої не обертаються в інерціальному просторі - *псевдоінерціальними*

Положення деякої матеріальної точки М в абсолютній системі відліку визначимо кватерніоном (7), положення полюсу О у тій самій системі відліку – кватерніоном

$$\mathbf{R}_O = c \cdot t' + \mathbf{i} \cdot x_O + \mathbf{j} \cdot y_O + \mathbf{k} \cdot z_O = c \cdot t' + \mathbf{r}_O \, ,$$

а положення точки М у переносній системі відліку визначимо кватерніоном

$$\mathbf{R}_r = c \cdot \tau_1 + \mathbf{i} \cdot \xi + \mathbf{j} \cdot \eta + \mathbf{k} \cdot \varsigma = c\tau_1 + \boldsymbol{\rho} \, ,$$

де t' - псевдочас полюса О в абсолютній системі відліку, τ_1 - псевдочас точки М в переносній системі відліку, а ξ, η, ς - її координати в системі координат $X_O Y_O Z_O$. Кватерніони швидкостей полюсу і точки відносно цих двох систем відліку матимуть вигляд:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = c\frac{d\tau}{dt} + \mathbf{v} = c\gamma + \mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz}{dt} \, ,$$

$$\mathbf{V}_r = \frac{d\mathbf{R}_r}{dt} = c\frac{d\tau_1}{dt} + \mathbf{v}_r = c\gamma_r + \mathbf{i}\frac{d\xi}{dt} + \mathbf{j}\frac{d\eta}{dt} + \mathbf{k}\frac{d\varsigma}{dt} \, ,$$

$$\mathbf{V}_O = \frac{d\mathbf{R}_O}{dt} = c\frac{dt'}{dt} + \mathbf{v}_O = c\gamma_O + \mathbf{i}\frac{dx_O}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy_O}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz_O}{dt} \, .$$

Тут позначено: $\dfrac{d\tau}{dt} = \gamma$; $\dfrac{dt'}{dt} = \gamma_O$; $\dfrac{d\tau_1}{dt} = \gamma_r$. З постулату 1 випливає:

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \, ; \qquad \gamma_O = \sqrt{1 - \frac{v_O^2}{c^2}} \, ; \qquad \gamma_r = \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}} \, .$$

Складання швидкостей

Основою побудови кінематики відносного руху є закон складання швидкостей. В класичній механіці він формулюється у такий спосіб: *вектор абсолютної швидкості точки дорівнює векторній сумі векторів пе-*

реносної і відносної швидкостей: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_r$, де $\mathbf{v}$ - швидкість точки у вихідній інерціальної системі відліку; $\mathbf{v}_O$ - швидкість полюса у тій самій системі відліку, а $\mathbf{v}_r$ - швидкість точки відносно переносної системи відліку. У випадку релятивістської механіки це співвідношення не є вірним, оскільки швидкість матеріальної точки не може перебільшувати швидкість світла.

Звернемось до постулату 1 (13). Застосовуючи його одночасно в АІС і у ПІС, одержимо:

$$c^2\gamma^2 + v^2 = c^2\gamma_r^2 + v_r^2 = c^2 . \tag{14}$$

Враховуючи постулат 2, можна дійти до аналогічного співвідношення між диференціалами переміщень

$$c^2(d\tau)^2 + (dr)^2 = c^2(d\tau_1)^2 + (d\rho)^2 = c^2(dt)^2 . \tag{15}$$

Відмінності (15) від (4) полягають у наступному:

1) кожну з величин, що входять у рівність (15) можна інтерпретувати як норму диференціала кватерніона переміщення точки: перша частина (15) є нормою диференціала кватерніону переміщення точки у переносній системі відліку, друга – у вихідній системі відліку;
2) квадрати модулів диференціала переміщень тепер додаються (а не віднімаються) до квадратів переміщень точки у власному псевдочасі;
3) у виразах норм кватерніонів фігурують не власні часи систем відліку, а псевдочаси точки по відношенню до відповідної системи відліку;
4) відповідно до (15) норми диференціалів кватерніонів переміщень точки у різних системах відліку не тільки весь час дорівнюють один одному, але й не залежать від руху точки, дорівнюючи у кожну мить квадрату добутку швидкості світла на диференціал єдиного часу систем відліку.

Співвідношення (5), що випливають з перетворень Фойгта-Лоренца, можна подати у вигляді

$$v_X = \frac{\gamma_O \cdot v_{rX}}{1 + \boldsymbol{\beta}_O \cdot \boldsymbol{\beta}_r}; \qquad v_Y = \frac{\gamma_O \cdot v_{rY}}{1 + \boldsymbol{\beta}_O \cdot \boldsymbol{\beta}_r}; \qquad v_Z = \frac{v_O + v_{rZ}}{1 + \boldsymbol{\beta}_O \cdot \boldsymbol{\beta}_r} . \tag{16}$$

а квадрат модуля швидкості набуде вигляду:

$$v^2 = v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2 = \frac{\gamma_O^2 \cdot (v_{rX}^2 + v_{rY}^2) + (v_O + v_{rZ})^2}{(1 + \boldsymbol{\beta}_O \cdot \boldsymbol{\beta}_r)^2} == c^2\left[1 - \left(\frac{\gamma_O \cdot \gamma_r}{1 + \boldsymbol{\beta}_O \cdot \boldsymbol{\beta}_r}\right)^2\right]. \tag{17}$$

Звідси випливає:

$$\gamma = \frac{\gamma_O \cdot \gamma_r}{1 + \boldsymbol{\beta}_O \cdot \boldsymbol{\beta}_r}; \qquad (\boldsymbol{\beta}_O = \frac{\mathbf{v}_O}{c};\ \boldsymbol{\beta}_r = \frac{\mathbf{v}_r}{c}). \tag{18}$$

Використовуючи це, можна подати (16) у виді

$$v_X = \frac{\gamma}{\gamma_r} v_{rX}; \qquad v_Y = \frac{\gamma}{\gamma_r} v_{rY}; \qquad v_Z = \frac{\gamma}{\gamma_O\gamma_r}(v_O + v_{rZ}) . \tag{19}$$

Тепер можна записати правило складання швидкостей у векторній формі:

$$\frac{\mathbf{v}}{\gamma} = \mathbf{i}\frac{v_X}{\gamma} + \mathbf{j}\frac{v_Y}{\gamma} + \mathbf{k}\frac{v_Z}{\gamma} = \mathbf{i}\frac{v_{rX}}{\gamma_r} + \mathbf{j}\frac{v_{rY}}{\gamma_r} + \mathbf{k}\frac{v_O + v_{rZ}}{\gamma_O\gamma_r} = \frac{\mathbf{v}_O}{\gamma_O\gamma_r} + \frac{\mathbf{v}_r}{\gamma_r} + \frac{1 - \gamma_O}{\gamma_O\gamma_r}\mathbf{e}_{v0}(\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{e}_{v0}) , \tag{20}$$

або, наближуючи за формою до класичного закону складання швидкостей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_r^* = \mathbf{v}_O + \left[\frac{\gamma}{\gamma_r}\mathbf{v}_r + \frac{\gamma(1 - \gamma_O)}{\gamma_O\gamma_r}\mathbf{e}_{v0}(\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{e}_{v0}) - \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_O\gamma_r}\right)\mathbf{v}_O\right], \tag{21}$$

де вектор

$$\mathbf{v}_r^* = \frac{\gamma}{\gamma_r}\mathbf{v}_r + \frac{\gamma(1 - \gamma_O)}{\gamma_O\gamma_r}\mathbf{e}_{v0}(\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{e}_{v0}) - \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_O\gamma_r}\right)\mathbf{v}_O \tag{22}$$

можна вважати образом відносної швидкості з точки зору "абсолютного" спостерігача. Як бачимо, образ відносної швидкості залежить не тільки від дійсної переносної швидкості, а й від переносної швидкості, причому досить складним чином.

Коли точка (фотон) рухається відносно ПІС зі швидкістю світла, з (14) випливає, що у цьому випадку має виконуватися співвідношення:

$$v^2 = c^2 . \tag{23}$$

Це означає, що з постулату 1 безпосередньо випливає головний постулат спеціальної теорії відносності про однаковість швидкості світла в усіх псевдоінерціальних системах відліку.

Неважко впевнитися, що співвідношення (17), які випливають з перетворень Фойгта-Лоренца, задовольняють рівності (23) , якщо в (17) покласти $v_r = c$. Отже вони є основою для формулювання закону складання швидкостей у релятивістській кінематиці.

Коли вектор $\mathbf{v}_O$ переносної швидкості (а, отже, і вектор $d\mathbf{r}_O$) спрямований уздовж осі Z , для окремих складових вектора $d\mathbf{r}$ матимемо наступні формули перетворення

$$dx = \frac{\gamma}{\gamma_r} d\xi ; \qquad dy = \frac{\gamma}{\gamma_r} d\eta ; \qquad dz = \frac{\gamma}{\gamma_O \gamma_r} (dz_O + d\varsigma) .$$

Саме ці співвідношення є заміною співвідношень (3) Лоренца для переміщень зі сталими швидкостями.

Динаміка матеріальної точки

Основний закон динаміки матеріальної точки в класичній механіці формулюється так: *швидкість змінювання вектора кількості руху матеріальної точки дорівнює у кожну мить векторній сумі всіх сил, що діють на матеріальну точку*:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{f} . \tag{24}$$

Тут позначено: $\mathbf{q} = m \cdot \mathbf{v}$ - вектор кількості руху точки, який дорівнює добутку маси точки на вектор її абсолютної швидкості, $\mathbf{f}$ - вектор сумарної сили, що діє точку.

Визначення 3. *Кількістю руху матеріальної точки називається кватерніон, що дорівнює добутку маси точки на кватерніон швидкості точки:*

$$\mathbf{Q} = m \cdot \mathbf{V} .$$

У відповідності до (11), це визначення приводить до такого виразу кількості руху:

$$\mathbf{Q} = q_\tau + \mathbf{q} = m \cdot v_\tau + m \cdot \mathbf{v} = m \cdot c \cdot \gamma + \mathbf{q} . \tag{25}$$

Постулат 3. *Похідна за абсолютним часом від кватерніону кількості руху матеріальної точки дорівнює кватерніону сили, що діє на матеріальну точку:*

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F} . \tag{26}$$

Постулат 4. *Сили часу відсутні.*

З останнього постулату випливає, що у виразі кватерніону сили скалярна його частина завжди дорівнює нулеві, тобто кватерніон сили містить тільки векторну частину $\mathbf{F} = \mathbf{f}$. Прирівнюючи нулеві, у відповідності до (26), скалярну частину похідної від кватерніону кількості руху, одержимо наступний результат:

$$m \cdot \gamma = m_0 = const ,$$

Тут m_0 - позначення маси покою точки. Власну масу m точки зручніше розглядати як *псевдомасу*, бо вона залежить не тільки від властивостей самої точки, але й її швидкості, величина якої залежить від вибору системи відліку.

Висновок 6. *Добуток псевдомаси матеріальної точки на швидкість змінювання її псевдочасу при будь-якому русі матеріальної точки залишається незмінним і рівним масі покою точки.*

Висновок 7. *Псевдомаса точки пов'язана з її безрозмірною швидкістю співвідношенням*

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} .$$

і завжди більша (або рівна) маси покою точки.

Висновок 8. *Кількість руху матеріальної точки у часі при будь-якому русі точки залишається сталою величиною, яка дорівнює добутку маси покою точки на швидкість світла:*

$$q_\tau = m_0 \cdot c .$$

Отже, нове визначення основного закону динаміки практично зводиться до виразу (24), з єдиним уточненням: роль маси точки тепер відіграє псевдомаса, що дозволяє подати закон у виді:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = \mathbf{f} .$$

Висновок 9. *Закон змінювання кількості руху збігається з відомим з класичної механіки, тільки в ньому роль швидкості точки грає псевдошвидкість точки*

Висновки

1. Основний постулат спеціальної теорії відносності – незалежність розповсюдження світла від вибору системи відліку – можна виконати і без припущення, що змінюються просторово-часові характеристики систем відліку, які переміщуються відносно одна одної. Пропонується замість використаного Ейнштейном припущення про рівність інтервалів точки у різних системах відліку використовувати постулат про незалежність модуля кватерніону швидкості точки від системи відліку, в якій розглядається рух.
2. Закон складання швидкостей, який встановлено на основі перетворень Фойгта-Лоренца, задовольняє зроблений постулат. Але, згідно пропонованому трактуванню, він обумовлений не залежністю просторово-часових характеристик системи відліку від її швидкості, а не прийнятністю у цьому випадку звичайного векторного складання вектора відносного переміщення з вектором переносного переміщення через те , що ці два вектори визначені у різних системах відліку. Встановлено новий закон складання цих векторів.
3. За запропонованою концепцією виключається можливість різного ходу часу у різних системах відліку, зокрема, стає неможливим парадокс "близнюків".

Перспективи подальших досліджень

Одержані результати можуть стати підґрунтям для розробки основ релятивістської динаміки систем матеріальних точок і твердих тіл з врахуванням релятивістських ефектів.

Литература

1. Эйнштейн А. Физика и реальность. – М.: Наука, 1965. – 360 с.
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. – М.: Наука, 1975, - 479 с.
3. Голубева О. В. Теоретическая механика/ учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1976. – 350 с.
4. Медведев Б. П. Начала теоретической физики/ учебное пособие. – М.: Наука, 1977. – 496 с.
5. Халфман Р. Динамика. – М.: Наука, 1972. – 564 с.
6. Релятивистская динамика / учебно-методическое пособие. Сост. И. В. Сандина, Н.Н. Куликова. – http: // www.yspy.yar.ru/cito/link2/metod/met4
7. Федоров Ф. И. Группа Лоренца. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
8. Потапов Ю. С., Фоминский Л. П., Потапов С. Ю. "Энергия вращения" . – http: // www.universalinternetLibrary.ru / book/ potapov
9. Мамаев А. В. "Высшая физика: физика с зависимостью заряда от скорости" . – http:// asmephysics.narod.ru / b_r

Опубликовано: Наукові вісті НТУУ "КПІ", № 5 (37), 2004. – с. 79-87